

# Desarrollo de Habilidades **Comunicativas y Matemáticas**

# **Secundaria**

**2do. Grado**





*Desarrollo de habilidades comunicativas y matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2013. Segundo grado de secundaria* fue desarrollado por la Dirección de Medios y Métodos Educativos, de la Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación, Secretaría de Educación de Guanajuato.

Primera edición, 2013

Secretaría de Educación de Guanajuato, 2013  
Conjunto Administrativo Pozuelos s/n, Centro,  
36000, Guanajuato, Gto.

Impreso en México  
Distribución Gratuita – Prohibida su venta



# Presentación

---

## A las maestras y maestros:

La evaluación es un proceso necesario para identificar los aprendizajes que las alumnas y los alumnos han adquirido satisfactoriamente y aquellos que deberán ser reforzados.

Año con año, la Secretaría de Educación Pública aplica la prueba ENLACE a todas las primarias y secundarias del país, para tener información sobre el logro académico de los alumnos.



En este contexto, ***Desarrollo de habilidades comunicativas y matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2013. Segundo grado de secundaria*** es un material que tiene como propósito ofrecerles una herramienta de apoyo que les permita guiar a sus alumnos en la preparación para la prueba ENLACE 2012, a través de una serie de actividades elaboradas con base en los programas de estudio de español y matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2012.

Los invitamos a que aprovechen este recurso y que apoyen a sus alumnos en el uso del mismo, de modo que les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora. Para ello, les sugerimos atender las ***Orientaciones metodológicas*** que se encuentran en este cuadernillo.

Estamos seguros de que con su compromiso y colaboración continuaremos trabajando para hacer de Guanajuato un estado de acciones encaminadas a mejorar la calidad de la educación.

## A las alumnas y alumnos:



La evaluación es un elemento necesario en tu proceso de aprendizaje, ya que mediante ella te es posible detectar cuáles son los temas y contenidos que dominas y aquellos que necesitas fortalecer.

La prueba ENLACE, que año con año se aplica a todas las primarias y secundarias del país, tiene la finalidad de evaluar tus conocimientos en el área de español, matemáticas y una tercera asignatura, y ofrecerte un diagnóstico individual sobre los conocimientos y habilidades en los temas evaluados.

Durante este ciclo escolar, la Secretaría de Educación de Guanajuato pone a tu disposición el material ***Desarrollo de habilidades comunicativas y matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2013. Segundo grado de secundaria***, el cual fue elaborado con el propósito de servirte como una herramienta de preparación para mejorar el logro académico. Este cuadernillo contiene una serie de actividades elaboradas con base en los programas de estudio de español y matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2012.

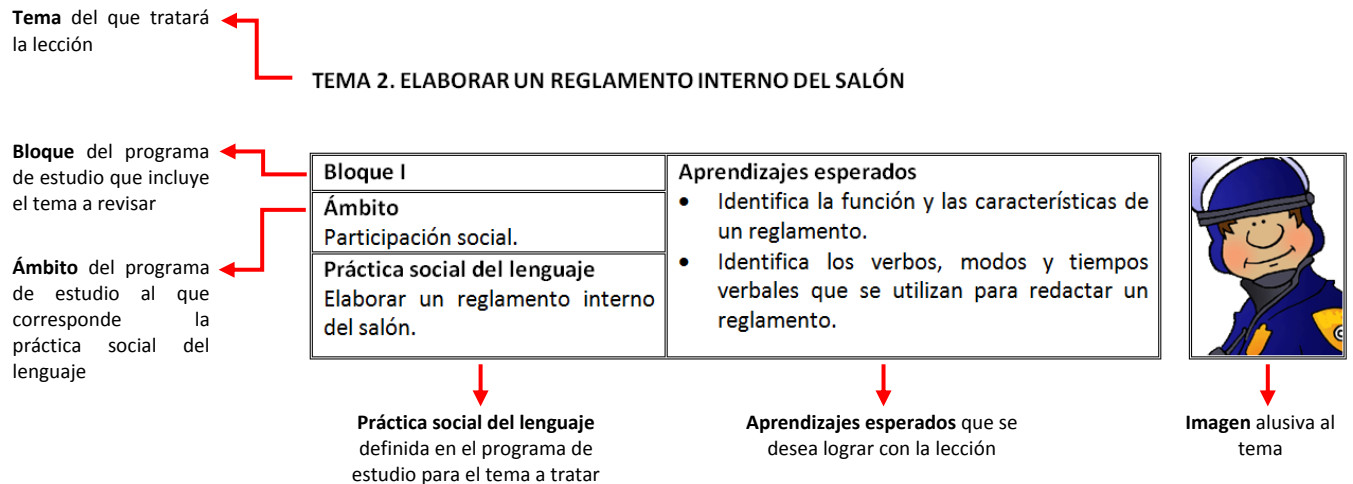
Es importante que para realizar el trabajo que te propone este cuadernillo, te apoyes en tu maestro de la asignatura de matemáticas, ya que él te podrá orientar en el uso del mismo.

Recuerda que la evaluación es un complemento de tu aprendizaje, por lo que te invitamos a considerar este proceso como una oportunidad para analizar tu desempeño escolar.

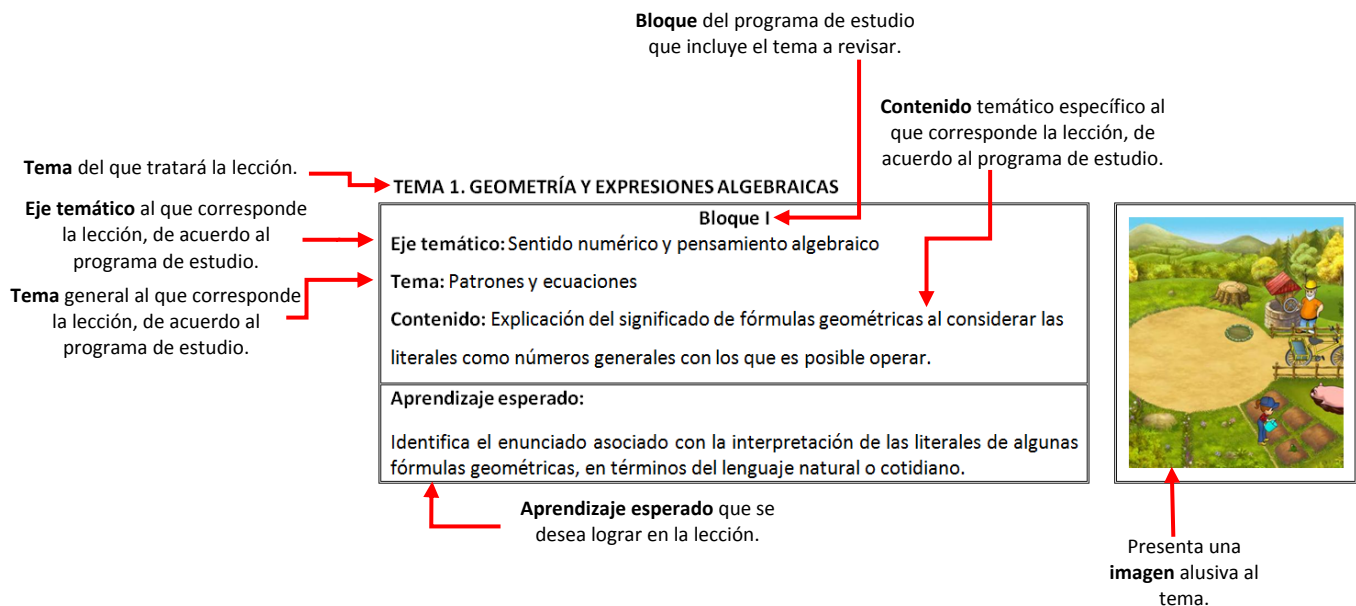
## ¿Cómo está organizado el cuadernillo de apoyo?

El cuadernillo se divide en dos secciones, una para español y otra para matemáticas. Cada sección se organiza por temas, cada uno de los cuales iniciará con una tabla de identificación como las que se muestran a continuación.

Para un tema de la **sección de habilidades comunicativas**:



Para un tema de la **sección de habilidades matemáticas**:



Cada tema incluye cuatro secciones que se describen a continuación:

**Introducción**

.....► Consiste en el planteamiento general del tema que se va a trabajar. Esta sección incluye una situación cotidiana que permite retomar los conocimientos previos sobre el tema.

**Desarrollo**

.....► Constituye la parte más amplia del tema, ya que contiene la presentación de contenidos y actividades que permiten fortalecer los aprendizajes que serán evaluados.

**Cierre**

.....► Incluye una breve descripción de los contenidos retomados en la lección. También contiene sitios de interés que se pueden consultar para ampliar los conocimientos sobre el tema.

**Evaluación**

.....► En esta sección se deberá resolver una evaluación sobre los contenidos retomados en la lección. Es importante que se utilice la **Hoja de respuestas** que se encuentra al inicio de cada sección del cuadernillo, ya que es necesario practicar el llenado de los círculos que presenta la prueba tipo ENLACE.

## Orientaciones metodológicas

Este cuadernillo ha sido diseñado con la finalidad de que los alumnos procesen la información y desarrollen los ejercicios, actividades y evaluaciones contenidas en cada uno de los temas, de manera individual, empleando tiempo extra clase. Sin embargo, serán de gran apoyo las orientaciones y retroalimentaciones que puedan obtener de la maestra o maestro que les imparte la asignatura de español y/o matemáticas.

En este sentido, se solicita a las maestras y los maestros que atiendan a las siguientes orientaciones metodológicas, para apoyar muy comprometidamente a sus alumnos, de modo que este recurso didáctico les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora.

- ❖ En un primer momento, acompañar a los alumnos en la lectura de la presentación y organización del cuadernillo. Identificar y comentar con ellos las temas específicos que han sido desarrollados. Esto se puede hacer de manera grupal en un espacio de clase no mayor a 10 minutos.

- ❖ Previo al estudio de un tema:

**Presentar** la situación planteada en la introducción. Esto con la intención de generar una activación cognitiva en los alumnos en relación con la temática a estudiar.

**Orientar** la atención de los alumnos sobre los aspectos del tema en los que deberán poner especial cuidado al momento de procesar la información y realizar los ejercicios, actividades y evaluaciones planteadas.

Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 7 minutos.

- ❖ Posterior al estudio de un tema:

**Retroalimentar** el aprendizaje de los alumnos mediante una actividad grupal en la que hagan una recapitulación breve sobre el desarrollo de las actividades y las soluciones de la evaluación. Esto con la intención de socializar el aprendizaje individual de los alumnos y resolver las dudas que se presenten.

Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 12 minutos.

Esperamos que estas orientaciones sean de utilidad para lograr el fortalecimiento de los temas clave que contiene el cuadernillo y generar la adquisición de los aprendizajes esperados en los alumnos.



## CONTENIDO

### SECCIÓN DE HABILIDADES COMUNICATIVAS

TEMA 1. ANALIZAR Y COMPARAR INFORMACIÓN SOBRE UN TEMA PARA ESCRIBIR ARTÍCULOS .....	1
TEMA 2. ANALIZAR DOCUMENTOS SOBRE LOS DERECHOS HUMANOS .....	8
TEMA 3. ANALIZAR Y COMENTAR CUENTOS DE LA NARRATIVA LATINOAMERICANA .....	16
TEMA 4. RESEÑAR UNA NOVELA PARA PROMOVER SU LECTURA.....	22
TEMA 5. ELABORAR REPORTES DE ENTREVISTA COMO DOCUMENTOS DE APOYO AL ESTUDIO .....	29
SECCIÓN DE RESPUESTAS.....	36

### SECCIÓN DE HABILIDADES MATEMÁTICAS

TEMA 1. POTENCIAS NEGATIVAS.....	37
TEMA 2. ÁNGULOS ENTRE PARALELAS Y UNA SECANTE.....	46
TEMA 3. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL .....	52
TEMA 4. PRISMAS Y PIRÁMIDES .....	58
TEMA 5. PROPORCIONALIDAD INVERSA .....	66
TEMA 6. SITUACIONES ALEATORIAS .....	71
TEMA 7. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS .....	77
TEMA 8. RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO .....	86
RESPUESTAS DE LAS ACTIVIDADES .....	93
RESPUESTAS DE LAS EVALUACIONES .....	94
Anexo 1. Patrones para recortar y armar un prisma y una pirámide pentagonal .....	95



**SECCIÓN DE  
HABILIDADES  
COMUNICATIVAS**





HOJA DE RESPUESTAS HABILIDADES COMUNICATIVAS	
Nombre	
Grado	
Grupo	

**Instrucciones.** Contesta las preguntas de la evaluación de cada tema presentado, rellenando con lápiz el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

**TEMA 1**

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**TEMA 4**

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**TEMA 2**

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**TEMA 5**

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**TEMA 3**

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



**TEMA 1. ANALIZAR Y COMPARAR INFORMACIÓN SOBRE UN TEMA PARA ESCRIBIR ARTÍCULOS**

<b>Bloque I</b>	<b>Aprendizajes esperados</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las preguntas que deben ser respondidas para el desarrollo de un tema.</li> <li>• Identifica los recursos utilizados para desarrollar ideas en un párrafo.</li> </ul>
<b>Ámbito</b> Estudio.	
<b>Práctica social del lenguaje</b> Analizar y comparar información sobre un tema para escribir artículos.	

**Introducción**

¿Alguna vez has intentado escribir sobre un tema y, al momento de comenzar, no sabes cómo hacerlo?

Escribir un texto es una de las tareas que necesitan de mayor cuidado y que a su vez nos brindan mayor satisfacción. El poder compartir con nuestros compañeros y amigos nuestra opinión acerca de algo que nos resulta interesante es maravilloso.

Si quieres plasmar en un escrito aquellas cosas que te interesan, deberás seleccionar y comparar información de distintas fuentes; con esto podrás enriquecer tus conocimientos y conocer los puntos de vista de aquellos autores que ya han escrito sobre lo tú escribirás y con ello obtener un texto de calidad respaldado por tu investigación.

Imagina que tu profesora de español te ha pedido que escribas un artículo en el que retomes el tema de la **“Obesidad infantil en México”**. Ella te sugiere que para facilitar la elaboración de tu texto enlistes, antes de iniciar a escribir, aquello que sabes sobre el tema, lo que desconoces y 5 preguntas que guíen tu investigación.

Lo que sé	Lo que desconozco	¿Preguntas para guiar mi investigación ?

## Desarrollo

---

Una vez que has planteado las preguntas a las que quieres dar respuesta con la elaboración de tu texto, deberás iniciar la búsqueda de aquellos materiales que traten sobre el tema que has elegido, algunos de estos pueden ser: libros, periódicos, enciclopedias, sitios de internet, entre otros. Posteriormente, identificarás los recursos para desarrollar las ideas de tu texto. La ejemplificación, la repetición, la explicación y la paráfrasis son algunos de ellos..

Al momento de redactar, debes estar seguro de que tus ideas sean claras para quienes las leen. Para ello, existen recursos que puedes utilizar para desarrollarlas con claridad.

- a) **Ejemplificación.** Se utilizan ejemplos o modelos que ilustren o demuestren lo expresado con la finalidad de reforzar la idea central y hacerla más comprensible al lector.

Ejemplo:

Se pueden lograr grandes cambios para contribuir a la lucha del control de la obesidad y el sobrepeso con la implementación de políticas orientadas a abatir esta problemática. **Por ejemplo**, a través de programas de promoción intensiva y orientación desde el entorno escolar sobre alimentación saludable y actividad física.

- b) **Repetición.** Es utilizada para fortalecer en la mente del lector una imagen o idea y consiste en la repetición de una expresión o enunciado.

Ejemplo:

El proceso de crecimiento de la **población** infantil de cualquier país, entre los 0 y los 18 años, se mide mediante tablas de referencia que indican dónde se encuentra la **mediana** para cada mes y año de edad, de acuerdo al sexo; la mediana es el punto que divide a la población a la mitad, ese valor de la **mediana** es el que se ha tomado como el valor de peso o de talla más aceptable para la **población**.

- c) **Explicación.** Se utiliza para aclarar o explicar los acontecimientos o sucesos mediante interrogantes (¿por qué?, ¿cómo?, ¿para qué?) que aclaran el desarrollo del tema.

Ejemplo:

Se ha visto un incremento alarmante en la obesidad infantil y sobrepeso entre los niños y niñas mexicanos. **La obesidad infantil es una condición donde el exceso de grasa corporal afecta negativamente la salud o bienestar de un niño.**

- d) **Paráfrasis.** Es una explicación o interpretación de un texto con el fin de reescribirlo, ya sea para reducir o ampliar lo expresado en el texto original.



Ejemplo:

Equilibremos nuestros alimentos. Hagamos ejercicio: caminemos, nademos, corramos. Esto es garantizar en el futuro una mejor calidad de vida.



Es muy importante nutrir tu investigación con información de diversas fuentes, como pueden ser: libros, periódicos, revistas, internet, datos estadísticos de fundaciones y organizaciones, material audiovisual, etcétera.

No olvides que es indispensable que cites las fuentes de donde obtuviste los datos que utilizarás para tu trabajo.

Lee los siguientes textos y realiza las actividades.

### TEXTO 1

#### México, cuarto lugar mundial en obesidad infantil

Al 2012, México ocupa el cuarto lugar en obesidad infantil, superado por Grecia, Estados Unidos e Italia. El 70% de la población adulta en nuestro país sufre de sobrepeso. En México la obesidad ha afectado más a las mujeres ya que el 34% sufre de sobrepeso a comparación con los hombres que son un 24.2% de la población. Hoy en día nos encontramos en segundo lugar de los países con mayor índice de obesidad en su población con el 30%. Superado de nuevo por Estados Unidos de América con el 33.8%, según datos dados a conocer por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). La obesidad y el sobrepeso se definen como una acumulación anormal o excesiva de grasa que puede ser perjudicial para la salud; de acuerdo con la Organización Mundial de la Salud (OMS), el sobrepeso se define como un Índice de Masa Corporal (IMC) igual o superior a 25, y la obesidad como un IMC igual o superior a 30.

El IMC es el peso en kilogramos dividido por el cuadrado de la talla en metros, es un indicador que se utiliza frecuentemente para identificar el sobrepeso y la obesidad. Tan sólo en México, la obesidad contribuye a un número cercano a 200 mil muertes por año, al ser un importante factor de riesgo para padecer enfermedades crónico-degenerativas, como son diabetes mellitus tipo dos, enfermedades isquémicas del corazón, cerebro-vasculares e hipertensivas.

Como asegura el doctor Eduardo González, del Instituto Mexicano del Seguro Social, la obesidad en México es una enfermedad que ha alcanzado el grado de pandemia, según la Organización Mundial de la Salud, y sus víctimas principales son los niños.

Como asevera la ONG mexicana El poder del consumidor, el sobrepeso y la obesidad en niños entre cinco y once años en México aumentó un 40 por ciento entre 1999 y 2006. De acuerdo a la Encuesta Nacional de Nutrición (ENN) de 1999 y la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT) 2006, la prevalencia combinada de sobrepeso y obesidad en escolares de ambos sexos aumentó un tercio en ese lapso, el sexo masculino mostró los mayores aumentos en obesidad. Según resultados de la ENSANUT, uno de cada tres adolescentes tiene obesidad o sobrepeso, lo que representa 5,757,400 adolescentes en el país con estas enfermedades.

De acuerdo a la OMS, una estrategia de prevención integral podría evitar 55,000 muertes por enfermedades crónicas al año en nuestro país.

Recuperado el 7 de marzo del 2013 de [http://www.amnu.org.mx/index.php?option=com\\_content&view=article&id=31:articulo-2&catid=10:articulos](http://www.amnu.org.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=31:articulo-2&catid=10:articulos)

**TEXTO 2****La obesidad infantil en México: una cuestión de peso**

Para prácticamente nadie es una novedad el saber que ocupamos el poco honroso segundo lugar mundial en sobrepeso infantil, superados únicamente por el vecino del norte, los Estados Unidos.

Hemos pasado de la concepción de que los niños rollizos son saludables a tener cifras francamente alarmantes acerca de las condiciones de salud de nuestros niños. Sabemos que existe un problema, sin embargo aún poco se ha hecho para resolverlo y partiendo de la base, tampoco para atacarlo.

La obesidad infantil es un problema serio de salud que debe interesarnos a todos, puesto que en un futuro, también nos afectará como sociedad. Las cifras y estadísticas que constantemente leemos son sólo un pequeño adelanto de lo que sucederá con nuestros infantes cuando lleguen a la juventud y se encuentren enfermos o incluso incapacitados para estudiar y trabajar.

De acuerdo al artículo “Sobrepeso y Obesidad en el Niño y el Adolescente” del Dr. Raymundo Paredes Sierra de la Facultad de Medicina de la UNAM, “De no establecerse estrategias que detengan el avance del sobrepeso y la obesidad en niños y adolescentes [...] enfermedades tales como la hipertensión, cardiopatía isquémica, infarto al miocardio, dislipidemias, diabetes, patología músculo esquelética y algunas neoplasias, cobrarán numerosas víctimas.”

Eso sin contar el costo que tendrá para los sistemas de salud pública atender a los numerosos enfermos que tendrán que recibir tratamiento de por vida para aliviar las enfermedades asociadas con la obesidad. Jóvenes que antes de cumplir treinta años tendrán severos problemas de vista o ceguera permanente, derivados de diabetes.

La Federación Mexicana de Diabetes publica en sus estadísticas que en nuestro país, uno de cada tres adolescentes de entre 12 y 19 años tiene obesidad o sobrepeso y que las cifras de individuos enfermos de diabetes han aumentado exponencialmente durante la última década.

**ESTADÍSTICAS DE DIABETES**

- Cada hora se diagnostican 38 nuevos casos de diabetes.
- Cada dos horas mueren 5 personas a causa de complicaciones originadas por la diabetes.
- De cada 100 pacientes con diabetes, 14 presentaN alguna complicación renal.
- El 30% de los problemas de pie diabético termina en amputación.
- De cada cinco pacientes con diabetes, 2 desarrollan ceguera.
- México ocupa el décimo lugar en diabetes mundial y se estima que para 2030 ocupe el séptimo puesto.

Sin duda, éste es un tema que debe interesar a todos los sectores de la sociedad: desde el académico hasta el médico y el empresarial, pues de la participación de una sociedad en conjunto dependerá la salud de una nación entera.

Solamente a través de programas de salud efectivos y que generen conciencia, así como políticas gubernamentales enérgicas referentes al tema y sin duda –y quizá lo más importante- campañas de educación y concientización, podremos lograr un cambio significativo.

Un país enfermo es un país cuyos índices educativos y laborales no progresarán. El avance de México a través de sus estudiantes y futuros profesionistas es un tema que también requiere salud para marchar. Todos, desde nuestras trincheras, podemos hacer un cambio que logre encaminarnos hacia ser una nación más sana, eliminando así el lastre de la obesidad en nuestros niños y jóvenes.

Recuperado el 07 de marzo del 2013 de <http://www.fundacionunam.org.mx/blog/salud/la-obesidad-infantil-en-mexico-una-cuestion-de-peso.html>

**Actividad 1**

Compara la información de los textos anteriores y escribe en el paréntesis afirmativo (A) o negativo (N), según corresponda.

- (    )      Los dos textos informan que México ocupa el segundo lugar mundial en sobrepeso infantil.
- (    )      El doctor Eduardo González afirma que: “De no establecerse estrategias que detengan el avance del sobrepeso y la obesidad en niños y adolescentes [...] enfermedades tales como la hipertensión, cardiopatía isquémica, infarto al miocardio, dislipidemias, diabetes, patología músculo esquelética y algunas neoplasias, cobrarán numerosas víctimas”.
- (    )      Los dos textos dicen que la Federación Mexicana de Diabetes, publicó en sus estadísticas que en nuestro país, uno de cada tres adolescentes tiene obesidad o sobrepeso.
- (    )      Los dos textos concuerdan en que los pacientes con diabetes pueden desarrollar problemas de ceguera.
- (    )      Los dos textos coinciden en que tener sobrepeso provoca enfermedades como la diabetes.

**Actividad 2**

Vuelve a leer el TEXTO 1. Ubica las fuentes que respaldan la información contenida en el artículo y escríbelas.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cierre

En esta sesión pudiste identificar el planteamiento de preguntas para guiar la búsqueda de información y los recursos empleados para el desarrollo de las ideas en un párrafo: ejemplos, repeticiones, explicaciones y paráfrasis.

Puedes encontrar más información sobre estos temas en el sitio que te proporcionamos a continuación.



[http://www.amnu.org.mx/index.php?option=com\\_content&view=article&id=31:articulo-2&catid=10:articulos](http://www.amnu.org.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=31:articulo-2&catid=10:articulos)  
<http://www.pumitasfutbol.unam.mx/obesidad.html>

## Evaluación

**Indicaciones.** Elige la opción que corresponde a la respuesta correcta. Utiliza la hoja de respuestas para contestar la evaluación.

1. De los siguientes fragmentos, elige el que sea un ejemplo de *explicación*.

- A) La obesidad infantil es un problema serio de salud que debe interesarnos a todos, puesto que en un futuro, también nos afectará como sociedad.
- B) La Federación Mexicana de Diabetes publica en sus estadísticas que en nuestro país, uno de cada tres adolescentes de entre 12 y 19 años tiene obesidad o sobrepeso y que las cifras de individuos enfermos de diabetes han aumentado exponencialmente durante la última década.
- C) Solamente a través de programas de salud efectivos y que generen conciencia, así como políticas gubernamentales enérgicas referentes al tema y sin duda –y quizá lo más importante- campañas de educación y concientización, podremos lograr un cambio significativo.
- D) El IMC es el peso en kilogramos dividido por el cuadrado de la talla en metros, es un indicador que se utiliza frecuentemente para identificar el sobrepeso y la obesidad.

2. Elige qué pregunta sería pertinente plantear para ampliar la información sobre las enfermedades crónico-degenerativas del párrafo siguiente:

Tan sólo en México, la obesidad contribuye a un número cercano a 200 mil muertes por año, al ser un importante factor de riesgo para padecer enfermedades crónico-degenerativas, como son diabetes mellitus tipo dos, enfermedades isquémicas del corazón, cerebro-vasculares e hipertensivas.

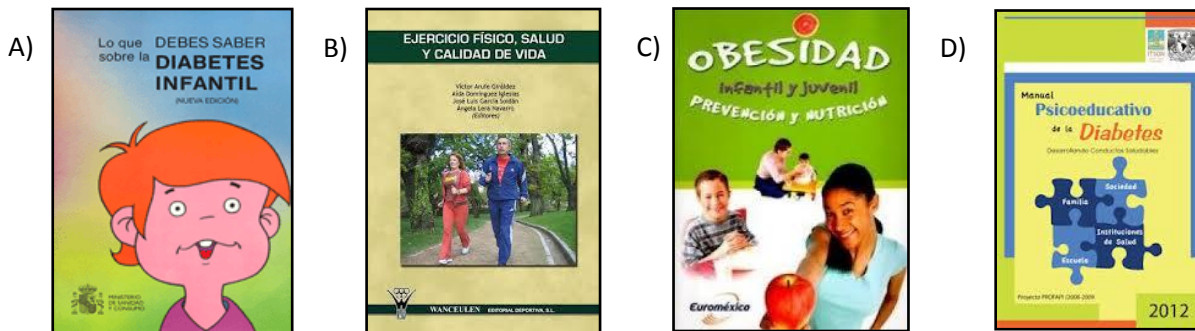
- A) ¿Qué es la obesidad?
- B) ¿Qué son las enfermedades crónico-degenerativas y cuáles son los riesgos de padecerlas?
- C) ¿Qué son las enfermedades crónico-degenerativas?
- D) ¿Qué son las enfermedades isquémicas del corazón?

3. ¿Cuál de los recursos para desarrollar ideas es utilizado en el siguiente párrafo?

La Federación Mexicana de Diabetes publica en sus estadísticas que en nuestro país, uno de cada tres adolescentes de entre 12 y 19 años tiene obesidad o sobrepeso y que las cifras de individuos enfermos de diabetes han aumentado exponencialmente durante la última década. Ejemplo de ello es que cada hora se diagnostican 38 nuevos casos de diabetes, cada dos horas mueren 5 personas a causa esta enfermedad, de cada 100 pacientes con diabetes, 14 presenta alguna complicación renal.

- A) Ejemplificación
- B) Paráfrasis
- C) Repetición
- D) Explicación

4. De los siguientes materiales, ¿cuál sería de mayor utilidad para obtener información sobre el tema *La Obesidad infantil en México*?



**TEMA 2. ANALIZAR DOCUMENTOS SOBRE LOS DERECHOS HUMANOS**

<b>Bloque I</b>	<b>Aprendizajes esperados</b>
<b>Ámbito</b> Participación social.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica las formas de redactar documentos que establecen derechos y obligaciones.</li> </ul>
<b>Práctica social del lenguaje</b> Analizar documentos sobre los derechos humanos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica los modos verbales utilizados para redactar documentos que establecen derechos y obligaciones.</li> </ul>

**Introducción**

Los seres humanos vivimos en sociedad y para convivir necesitamos de leyes, normas y reglas que guíen nuestras relaciones sociales y que nos indiquen qué tenemos y qué no tenemos permitido hacer dentro de una comunidad.

En cada país existen diferentes grupos sociales y, por ende, una amplia gama de normas y reglas que pueden o no ser aplicables al lugar donde vivimos; sin embargo, existen derechos que, basados en la libertad, la justicia y la paz en el mundo, debieran ser aplicables a todos los seres humanos, teniendo por base el reconocimiento de la dignidad individual y de igualdad de derechos.

Este es el caso de la Declaración Universal de Derechos Humanos, un ideal común por el que todos los pueblos y naciones deben esforzarse, a fin de que tanto los individuos como las instituciones, inspirándose constantemente en ella, promuevan, mediante la enseñanza y la educación, el respeto a estos derechos y libertades, y aseguren, por medidas progresivas de carácter nacional e internacional, su reconocimiento y aplicación universal y efectiva, tanto en los pueblos de los Estados Miembros como en los territorios colocados bajo su jurisdicción<sup>1</sup>.

1) ONU. Declaración Universal de los Derechos Humanos. Publicada el 10 de diciembre de 1948.

Investiga dos definiciones de derechos humanos y cita la fuente de consulta.

Definición 1

---



---

Definición 2

---



---

## Desarrollo

Las sociedades definen sus propias reglas y normas para hacer posible la relación entre las personas y los grupos sociales. En este sentido, actualmente existen documentos nacionales e internacionales que tienen como finalidad definir derechos y obligaciones para los ciudadanos.

### Formas de redactar documentos que establecen derechos y obligaciones

1. El **modo indicativo** es utilizado para **preguntar, negar o afirmar**, siempre con certeza. Quien lo utiliza refleja que no existe duda sobre lo que se escribe.

Ejemplo:

Artículo 24

3. Todo niño **tiene** derecho a adquirir una nacionalidad. (Presente indicativo)  
(ONU. Pacto Internacional de Derechos Civiles y Políticos).

Artículo 8

1. Nadie **estará** sometido a servidumbre. (Futuro indicativo)  
(ONU. Pacto Internacional de Derechos Civiles y Políticos)

2. Las normas pueden enunciarse haciendo uso de **verbos en infinitivo**, que son aquellos con terminación ar,er o ir.

Ejemplo:

Artículo 21

La asistencia social es una deuda sagrada. La sociedad debe **asegurar** la subsistencia de los ciudadanos desprotegidos, ya sea procurándoles un trabajo, ya sea asegurando los medios de existencia a los que no estén en condiciones de trabajar.  
(Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano de 1793).

3. **Forma impersonal.** Carece de sujeto. Para su construcción se utiliza la conjugación en tercera persona de singular. Se acompaña de la partícula “se”.

Ejemplo:

Artículo 23

2. **Se reconoce** el derecho del hombre y de la mujer a contraer matrimonio y a fundar una familia si tienen edad para ello.  
(ONU. Pacto Internacional de Derechos Civiles y Políticos)

4. Los artículos de los documentos que establecen derechos y obligaciones pueden ser redactados haciendo uso de los adjetivos *todo/ningún* o usando el pronombre indefinido *nadie*.

Ejemplos:

#### Artículo 9

1. **Todo** individuo tiene derecho a la libertad y a la seguridad personales. **Nadie** podrá ser sometido a detención o prisión arbitrarias. **Nadie** podrá ser privado de su libertad, salvo por las causas fijadas por ley y con arreglo al procedimiento establecido en ésta.  
(ONU. Pacto Internacional de Derechos Civiles y Políticos)



#### Uso y función de los verbos deber, poder, tener que y haber que.

En los documentos que establecen derechos y obligaciones el uso de los verbos juega un papel muy importante, ya que estos determinan las acciones que deben seguirse.

**Deber.** Si este verbo va acompañado de otro en infinitivo (terminado en -ar, -er, -ir) significa obligación.

Ejemplo:

Artículo 9.

La ley **debe proteger** la libertad pública e individual contra la opresión de los que la administran.

(Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano de 1793).

**Poder.** Se aplica para expresar una autorización, la capacidad de hacer algo o cuando se tiene la opción de elegir entre varias posibilidades.

Ejemplo:

VII. Ningún hombre **puede ser** acusado, arrestado y mantenido en confinamiento, excepto en los casos determinados por la ley, y de acuerdo con las formas por ésta prescritas.

(Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano de 1789)

**Tener que, haber que.** Se utilizan cuando se tiene la necesidad u obligación de realizar una acción.

Ejemplo:

Artículo 13

Todo hombre es considerado inocente hasta que sea declarado culpable. Por lo tanto, siempre que su detención se haga indispensable, la ley **ha de reprimir** firmemente todo rigor mayor del necesario para asegurar su persona.

(Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano de 1793).



Lee el siguiente texto y realiza las actividades.

## **DECLARACIÓN UNIVERSAL DE DERECHOS HUMANOS (Fragmento)**

### **Artículo 1**

Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, dotados como están de razón y conciencia, deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

### **Artículo 2**

1. Toda persona tiene todos los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición.

2. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona, tanto si se trata de un país independiente, como de un territorio bajo administración fiduciaria, no autónomo o sometido a cualquier otra limitación de soberanía.

### **Artículo 3**

Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

### **Artículo 4**

Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre, la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

### **Artículo 5**

Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

### **Artículo 6**

Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

### **Artículo 7**

Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración y contra toda provocación a tal discriminación.

### **Artículo 8**

Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales reconocidos por la constitución o por la ley.

### **Artículo 9**

Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

### **Artículo 10**

Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

**Artículo 11**

1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad, conforme a la ley y en juicio público en el que se le hayan asegurado todas las garantías necesarias para su defensa.
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

**Artículo 12**

Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

**Artículo 13**

1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso del propio, y a regresar a su país.

**Artículo 14**

1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

**Artículo 15**

1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

**Artículo 16**

1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia, y disfrutarán de iguales derechos en cuanto al matrimonio, durante el matrimonio y en caso de disolución del matrimonio.
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

**Artículo 17**

1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

**Artículo 18**

Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión; este derecho incluye la libertad de cambiar de religión o de creencia, así como la libertad de manifestar su religión o su creencia, individual y colectivamente, tanto en público como en privado, por la enseñanza, la práctica, el culto y la observancia.

Recuperado el 4 de marzo del 2013, de <http://www.cinu.mx/onu/documentos/declaracion-universal-de-los-d/>



## Actividad 1

Ubica los verbos subrayados, escríbelos en el recuadro e indica la forma en que está redactado cada uno (modo indicativo, forma impersonal o infinitivo).

### Artículo 15

1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

### Artículo 16

1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia, y disfrutarán de iguales derechos en cuanto al matrimonio, durante el matrimonio y en caso de disolución del matrimonio.
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Verbo	Tiempo y modo verbal



## Actividad 2

Reescribe el artículo 13, adaptándolo al futuro indicativo.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cierre**

---

En esta sesión pudiste recordar las formas y modos verbales utilizados para redactar documentos que establecen derechos y obligaciones.

Puedes encontrar más información sobre estos temas en el sitio que te proporcionamos a continuación.



<http://mexico.aula365.com/post/modos-tiempos-verbales/>

**Evaluación**

---

**Indicaciones.** Elige la opción que corresponde a la respuesta correcta. Utiliza la hoja de respuestas para contestar la evaluación.

1. ¿En qué tiempo está conjugado el verbo *ser* del artículo 5 de la Declaración Universal de Derechos Humanos?  
  
A) Infinitivo  
B) Futuro  
C) Pretérito  
D) Presente
  
2. Lee el artículo 4 de la Declaración sobre el derecho y el deber de los individuos, los grupos y las instituciones de promover y proteger los derechos humanos y las libertades fundamentales universalmente reconocidos.

**Artículo 4**

1. Incumbe al Estado la responsabilidad de adoptar medidas legislativas, judiciales, administrativas o de otra índole apropiadas para promover en todas las personas sometidas a su jurisdicción la comprensión de sus derechos civiles, políticos, económicos, sociales y culturales.

¿Cuál es el modo verbal que se utiliza en las palabras subrayadas?

- A) Infinitivo
- B) Subjuntivo
- C) Indicativo
- D) Imperativo

3. De las siguientes opciones, elige aquella que por su redacción señale una *obligación*.
- A) La seguridad consiste en la protección acordada por la sociedad a cada uno de sus miembros para la conservación de su persona, de sus derechos y de sus propiedades.
  - B) El derecho de presentar peticiones a los depositarios de la autoridad pública no puede, en ningún caso, ser prohibido, suspendido o limitado.
  - C) Todo individuo que usurpe la soberanía habría de recibir muerte inmediata a manos de los hombre libres.
  - D) La ley debe proteger la libertad pública e individual contra la opresión de los que la administran.

**TEMA 3. ANALIZAR Y COMENTAR CUENTOS DE LA NARRATIVA LATINOAMERICANA**

<b>Bloque I</b>	<b>Aprendizajes esperados</b>
<b>Ámbito</b> Literatura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce la diferencia entre variantes dialectales y sociales.</li> <li>• Reconoce la diferencia entre indigenismo, regionalismo y extranjerismo.</li> <li>• Identifica los indigenismos, regionalismos o extranjerismos en un texto.</li> </ul>
<b>Práctica social del lenguaje:</b> Analizar y comentar cuentos de la narrativa latinoamericana.	

**Introducción**

¿Te ha pasado que al escuchar platicar a otras personas, hay palabras que no entiendes?: tu abuelo al contar las historias de su niñez en su pueblo, la señora que trae quesos a al mercado desde una comunidad lejana, tu vecino que vive en Estados Unidos y que en las vacaciones viene a tu ciudad.

Existen palabras en el idioma español cuyos orígenes se encuentran en lenguas indígenas y otras que varían de acuerdo a las regiones o que proceden de otros países que, por diversas razones, se han integrado a nuestro idioma. Su uso varía de acuerdo a los diferentes grupos sociales, al nivel socioeconómico y a las distintas generaciones.

Busca en el diccionario las definiciones de indigenismo, regionalismo y extranjerismo, y anótalas en las siguientes líneas.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Desarrollo

---

Las variantes dialectales consisten en las diferentes formas de hablar una lengua de acuerdo a la región o zona geográfica donde se usa.

Por ejemplo:

La palabra tecolote proviene del náhuatl *tecolotl* y es utilizada en Guatemala, Honduras y México para designar al *búho*.

Las variantes sociales consisten en las diferentes formas de hablar de acuerdo a factores como la edad, la clase social, el nivel educativo o la procedencia rural o urbana.

Por ejemplo:

En el medio rural se suelen usar palabras como: ansina (así) o endenantes (antes).

### Indigenismos, regionalismos y extranjerismos

Los indigenismos son palabras o expresiones provenientes de lenguas indígenas que han sido incorporadas al español.

Por ejemplo:

Chicle:	Goma de mascar	Proviene del náhuatl <i>tzictli</i> .
Escuincle:	Niño	Proviene del náhuatl <i>itzcuintli</i> , perro sin pelo.

Los regionalismos son palabras o expresiones usadas en alguna región determinada.

Por ejemplo:

Morro(a):	Muchacho(a)	Se usa en Monterrey.
Ruco(a):	Persona vieja	Se usa en Sonora.

Los extranjerismos son palabras o frases provenientes de otras lenguas que han sido incorporadas al español.

Bulevar:	Proviene del francés	Significa <i>vía pública</i> .
Software:	Proviene del inglés	Significa <i>programa informático</i> .

Lee cuidadosamente el siguiente texto. Pon especial atención en las palabras subrayadas.

**Los de abajo  
(Fragmento)  
Mariano Azuela**

Remigia, emprésteme unos blanquillos, mi gallina amaneció echada. Allí tengo unos señores que quieren almorzar.

Por el cambio de la viva luz del sol a la penumbra del jacalucho, más turbia todavía por la densa humareda que se alzaba del fogón, los ojos de la vecina se ensancharon. Pero al cabo de breves segundos comenzó a percibir distintamente el contorno de los objetos y la camilla del herido en un rincón, tocando por su cabecera el cobertizo tiznado y brillante.

Se acurrucó en cuclillas al lado de señá Remigia y echando miradas furtivas adonde reposaba Demetrio, preguntó en voz baja:

— ¿Cómo va el hombre?... ¿Aliviado?... ¡Qué güeno!... ¡Mire, y tan muchacho!... Pero en toavía está retedescolorido... ¡Ah!... ¿De moo es que no le cierra el balazo?... Oiga, señá Remigia, ¿no quiere que le hagamos alguna lucha?

Señá Remigia, desnuda arriba de la cintura, tiende sus brazos tendinosos y enjutos sobre la mano del metate y pasa y repasa su nixtamal.

—Pos quién sabe si no les cuadre —responde sin interrumpir la ruda tarea y casi sofocada—; ellos train su dotor y por eso...

— Señá Remigia —entra otra vecina doblando su flaco espinazo para franquear la puerta—, ¿no tiene unas hojitas de laurel que me dé pa hacerle un cocimiento a María Antonia?... Amaneció con el cólico...

Recuperado el 4 de marzo de 2013 <http://www.biblioteca.org.ar/libros/142337.pdf>



Trata de inferir el significado de las palabras subrayadas en el fragmento anterior de acuerdo al contexto de la narración. Después, relaciona las columnas siguientes.

- |                |     |  |
|----------------|-----|--|
| a) Emprésteme  | ( ) | Especie de choza   |
| b) Blanquillos | ( ) | Maíz cocido con cal, que sirve para hacer tortillas después de molido. |
| c) Jacalucho   | ( ) | Columna vertebral  |
| d) Fogón       | ( ) | Líquido con hierbas que se hace para beber                             |
| e) Metate      | ( ) | Huevo de gallina   |
| f) Nixtamal    | ( ) | Pedir prestado   |
| g) Espinazo    | ( ) | En ranchos y estancias, lugar donde se hace el fuego para cocinar.     |
| h) Cocimiento  | ( ) | Piedra sobre la cual se muelen manualmente el maíz y otros granos.     |





Reelabora el texto, sustituyendo las palabras originales por otras de la siguiente lista de opciones, según creas conveniente.

quieren – columna – delgados – remedio – bueno – qué modo – todavía – présteme – señores – agrade – traen – doctor – muy pálido – huevos – Señora

\_\_\_\_\_ Remigia, \_\_\_\_\_ unos \_\_\_\_\_, mi gallina amaneció echada. Allí tengo unos \_\_\_\_\_ que \_\_\_\_\_ almorzar.

Por el cambio de la viva luz del sol a la penumbra del jacalucho, más turbia todavía por la densa humareda que se alzaba del fogón, los ojos de la vecina se ensancharon. Pero al cabo de breves segundos comenzó a percibir distintamente el contorno de los objetos y la camilla del herido en un rincón, tocando por su cabecera el cobertizo tiznado y brillante.

Se acurrucó en cuclillas al lado de señá Remigia y echando miradas furtivas adonde reposaba Demetrio, preguntó en voz baja:

—¿Cómo va el hombre?... ¿Aliviado?... ¡Qué \_\_\_\_\_!... ¡Mire, y tan muchacho!... Pero \_\_\_\_\_ está \_\_\_\_\_... ¡Ah!... ¿De \_\_\_\_\_ es que no le cierra el balazo?... Oiga, señá Remigia, ¿no quiere que le hagamos alguna lucha?

Señá Remigia, desnuda arriba de la cintura, tiende sus brazos tendinosos y \_\_\_\_\_ sobre la mano del metate y pasa y repasa su nixtamal.

—Pos quién sabe si no les \_\_\_\_\_ —responde sin interrumpir la ruda tarea y casi sofocada—; ellos \_\_\_\_\_ su \_\_\_\_\_ y por eso...

— Señá Remigia —entra otra vecina doblando su flaca \_\_\_\_\_ para franquear la puerta—, ¿no tiene unas hojitas de laurel que me dé pa hacerle un \_\_\_\_\_ a María Antonia?... Amaneció con el cólico...



Hay algunas palabras que son usadas en común por varios países hispanohablantes, que comparten un mismo origen indígena. Por ejemplo: La palabra metate viene del náhuatl *nextamalli* y es usada en El Salvador, Honduras y México.

**Cierre**

---

En esta sesión pudiste identificar el significado de las variantes dialectales y sociales y sus ejemplos. Por otra parte, pudiste reconocer las diferencias entre indigenismo, regionalismo y extranjerismo.

Puedes encontrar más información sobre estos temas en el sitio que te proporcionamos a continuación.



<http://www.encyclopediadetareas.net/2011/04/variedades-sociales-de-la-lengua.html>  
<http://www.jergasdehablahispana.org/>

**Evaluación**

---

**Indicaciones.** Elige la opción que corresponde a la respuesta correcta. Utiliza la hoja de respuestas para contestar la evaluación.

1. ¿Cuál de las siguientes situaciones sucede en el fragmento de *Los de abajo* que leíste?
  - A) La primer vecina va al jacal de Señá Remigia con el propósito de curar al herido que reposaba allí.
  - B) La primer vecina va al jacal de Señá Remigia para ofrecerle hojitas de laurel.
  - C) La segunda vecina va al jacal de Señá Remigia para ayudarle a moler el nixtamal para las tortillas.
  - D) La segunda vecina va al jacal de Señá Remigia para pedirle hojitas de Laurel.
  
2. ¿Por qué Señá Remigia no acepta intervenir en la curación del muchacho, como lo propone la primera vecina?
  - A) Porque tiene prisa en terminar de moler el nixtamal para hacer las tortillas.
  - B) Porque la gente del muchacho cuenta con su propio doctor.
  - C) Porque la humareda del fogón no la deja ver con claridad la herida del balazo.
  - D) Porque necesita hojitas de laurel para la curación.
  
3. ¿A qué personaje del cuento se le puede relacionar con el sentimiento de preocupación?
  - A) A Remigia.
  - B) A la primer vecina.
  - C) A Demetrio.
  - D) A la segunda vecina.

4. ¿Cuál de las siguientes opciones del texto anterior es una variante dialectal?

- A) Señá.
- B) Retedescolorido
- C) Metate.
- D) Jacal.

5. ¿Cuál de las siguientes palabras del texto anterior corresponde a un regionalismo?

- A) Blanquillos.
- B) Nixtamal.
- C) Penumbra.
- D) Güeno.

**TEMA 4. RESEÑAR UNA NOVELA PARA PROMOVER SU LECTURA**

<b>Bloque IV</b>	<b>Aprendizajes esperados</b>
<b>Ámbito</b> Literatura.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica los personajes de un texto narrativo de acuerdo a su importancia.</li> <li>• Identifica las características de los personajes de un texto narrativo.</li> <li>• Identifica el ambiente de un texto narrativo.</li> </ul>
<b>Práctica social del lenguaje</b> Reseñar una novela para promover su lectura.	

**Introducción**

Volar al espacio, rescatar a un pueblo, luchar contra la más terrible bestia marina... leer es toda una experiencia que nos transforma. Leyendo una novela puedes identificarte con el personaje principal o con aquellos personajes secundarios que construyen la trama de la historia.

Cómo se tejen las historias, cómo surge una trama, todo esto lo podemos aprender al leer una novela, y qué mejor que compartirlo con tus amigos por medio de la reseña de ésta.

Imagina que vas a escribir un cuento de un tema que te llame la atención. Puedes inspirarte en acontecimientos de la vida real, en algún recuerdo de cuando eras más pequeño, en un divertido viaje con tu familia, en una aventura con tus amigos o en tu primer amor. Una vez que hayas decidido el tema, determina quiénes serán los personajes de tu historia y completa el siguiente esquema.

Personaje principal de tu cuento

---



---



---

Personajes secundarios

## Desarrollo

---

Un texto consiste en un conjunto coherente de enunciados que forma una unidad con sentido y que tiene una intención comunicativa. El acto de narrar, por otra parte, hace referencia a contar o referir una historia, tanto verídica como ficticia.

Puede decirse, por lo tanto, que un texto narrativo es aquel que incluye el relato de acontecimientos que se desarrollan en un determinado espacio temporal. Dicho relato incluye la participación de diversos personajes, que pueden ser reales o imaginarios.

Pertenecen al género narrativo obras tales como el cuento, la novela, la fábula, la leyenda, el mito, la reseña, la autobiografía, la historieta, el diario de vida, entre otros.

### Personajes de los textos narrativos

Los personajes son parte fundamental en el desarrollo de una obra literaria, ya que son los seres que dan vida a los acontecimientos de una narración. Estos se dividen por la importancia que tienen en el desarrollo de la historia en:

- **Protagonista o personaje principal.** Es el centro de la narración. Puede ser un individuo, varios o una colectividad. Es un personaje que evoluciona a lo largo de la historia. El conflicto recae en él.
- **Personaje antagónico.** Es quien se opone al protagonista en el conflicto esencial de una obra.
- **Personajes secundarios.** Son personajes planos que no evolucionan, participan en la historia, pero sin la trascendencia de los principales.
- **Extras o incidentales.** Son meros elementos presenciales y pueden aparecer en alguna parte de la historia, pero su función no es imprescindible ni significativa.

### Características de los personajes de un texto narrativo

Los personajes de un texto narrativo pueden ser descritos a partir de los siguientes elementos:

- **Características físicas.** Se relacionan con la edad, el sexo, la apariencia y los rasgos físicos.
- **Características sociales o culturales.** Se relacionan con el rol social que cumple el personaje: clase, profesión, religión, educación, entre otros.
- **Características psicológicas.** Se relacionan con la forma de ser y de pensar de los personajes: personalidad, deseos, motivaciones, actitudes, valores morales, entre otros..



Los personajes que habitan en las historias pueden ser tímidos, audaces, enojones, alegres, rebeldes, cobardes, valientes, introvertidos, extrovertidos, etc.; de ahí que hoy en día existan personajes de la literatura cuya personalidad se ha convertido en ejemplo a seguir; tal es el caso de El Quijote y de don Juan Tenorio. Cuando alguien es soñador e idealista, un hombre o una mujer que lucha por conseguir la justicia y el bien, se dice que es "quijotesco"; cuando un hombre busca seducir a un sinnúmero de mujeres, se dice que es un "don Juan".

### El ambiente en un texto narrativo

El ambiente en un texto narrativo es el marco donde se desarrolla la historia. Este puede ser:

- **Físico.** Se refiere a las condiciones materiales que rodean a los personajes y los espacios físicos en los que se desenvuelven. A través de estos se puede determinar si es un ambiente de riqueza, de pobreza, de bienestar o incomodidad física, etcétera.
- **Social.** Se refiere al ambiente determinado por las relaciones que se establecen entre los personajes. Estas pueden ser de enfrentamiento (en el caso de una guerra o peleas) o de ayuda.
- **Psicológico.** Se refiere al ambiente determinado por las sensaciones que se perciben a través de los sucesos narrados. Se puede encontrar ambientes de duda, violencia, alegría, nostalgia, etcétera.



Lee el siguiente texto y realiza las actividades.

### Fito y el pesado

Ema Wolf

Fito se sentó en una silla y se puso a dibujar.

Un elefante.

Grande, con cuatro patas, una trompa y dos colas porque la primera le había salido mal.

Sintió que le tiraban de la manga.

– ¡Pst...! ¡Nene, nene!

Era el elefante.

A Fito no le gustaba que lo llamaran “nene”. Se lo dijo.

–Me llamo Fito, no “nene”. ¿Qué querés?

–Sentarme, eso quiero – dijo el elefante-. La gente siempre dibuja elefantes parados y no piensa que se cansen.

Tenía razón. Fito le dibujó una silla igual a la suya.

–Ahora quiero un lápiz, nene.

Fito era paciente con los elefantes. Le dibujó un lápiz como el suyo.

– ¿Así?  
– Sí. Ahora quiero una hoja de papel.  
Fito era paciente con los elefantes pero no demasiado. Le dibujó la hoja de papel.  
Listo. Ahora el elefante tenía silla, papel y lápiz.  
Ah, otra cosa.  
De pronto vio que el elefante estaba a punto de llorar. ¡Dios! ¡Qué animal tan pesado!  
– ¿Y ahora qué querés?  
El elefante no contestó.  
– ¡Decime qué querés!  
El elefante suspiró pero no dijo nada.  
Fito sabía bastante de elefantes, había dibujado miles en su vida, los conocía mejor que los exploradores.  
– Ya sé lo que querés. Querés un elefante como el mío.  
Muy despacio, le dibujó un elefante como el suyo.  
Grande, con cuatro patas, una trompa y dos colas porque la primera le había salido mal.  
Pero...  
Enseguida sintió que le tiraban de la manga.  
– ¡Pst! ¡Nene, nene, nene!  
Era el elefante del elefante.

(En: Wolf. Ema, *Filotea.*, México, Alfaguara Infantil, 2005, p.13-18)

1. Subraya con color rojo los personajes que aparecen en esta historia.
2. Clasifica a los personajes de acuerdo a su importancia para el desarrollo de la historia

---

---

---

---

---

---



Lee el siguiente texto. Posteriormente, realiza la actividad.

### **Ana Karenina (Fragmento)**

Todas las familias felices se parecen entre sí, del mismo modo que las desgracias lo son, cada una a su manera.

En casa de los Oblonsky reina un completo trastorno. Al enterarse la princesa de que el marido sostiene relaciones con una francesa que había sido institutriz de sus hijos, le había manifestado que no podía seguir viviendo con él, bajo el mismo techo.

Tres días hacía ya que duraba esta situación, la cual aparecía en toda su crudeza tanto a los esposos como a los demás moradores de la casa. Deudos y criados comprendían que aquella vida en común ya no tenía razón de ser, pues se sentían más extraños entre sí que las personas que se encuentran por casualidad en un hotel. La señora no salía de su habitación; el marido pasaba el día fuera de casa; los niños correteaban por todas partes, sin objeto ni nadie que los vigilara; la institutriz inglesa, tras una disputa con el ama de llaves había escrito a una amiga suya, rogándole que le buscara una nueva colocación; el cocinero ya hacía veinticuatro horas que había dejado la casa; el cochero y la muchacha de la limpieza habían pedido que se les abonase el salario.

Tres días después de la disputa con su esposa, el príncipe Esteban Arcadieivitch Oblonsky o Stiva, como solían llamarle sus amigos, se despertó a la hora de costumbre, a las ocho; pero no en la alcoba conyugal, sino sobre el diván de cuero de su despacho. Deseoso sin duda de prolongar su sueño, hizo dar media vuelta a su bien cuidada humanidad, abrazó cariñosamente la almohada y apoyó en ella la mejilla. Pero, de repente, se irguió, se sentó en el borde del sofá y abrió los ojos.

“¿Cómo ha sido?- se preguntó, tratando de recordar su sueño-.

¡Ah, sí! Alabín daba un banquete en Darmstadt ... pero Darmstadt estaba en América ... Alabín ofrecía la comida en mesas de cristal...

¡Unas mesas que cantaban! El mío tesoro... No, no era eso; era algo muchísimo mejor... y sobre las mesas había unas garrafas de cristal que parecían mujeres...”

Los ojos de Esteban Arcadieivitch brillaban alegremente. “Sí- se dijo sonriendo- era encantador, extraordinariamente encantador, pero cuando se despierta, estas cosas no pueden describirse, ya no se tiene incluso noción exacta de ellas.”

Al advertir que se filtraba un rayo de sol entre las cortinas, sacó fuera del lecho sus pies en busca de zapatillas recamadas de oro (regalo de su cara mitad el día de su cumpleaños) y, siguiendo una costumbre de nueve años, sin terminar de levantarse, tendió la mano hacia su bata, suspendida de ordinario en la cabecera de su cama. Entonces recordó de pronto qué le había llevado allí. Y entonces dejó de sonreír y frunció el entrecejo.

– ¡Oh, oh, oh! – gemía al recordar lo sucedido, y en su imaginación resurgieron los detalles del altercado que había sostenido con su esposa, su situación sin salida posible y –esto era lo más penoso- su propia culpa.

– Ella no me perdonará nunca: no puede perdonarme... y lo peor es que toda la culpa es mía; sí, mía... Y, sin embargo, yo no me creo culpable...Es todo un problema... ¡Ah! –gimió, desesperado, recordando los momentos más amargos de la disputa.

El instante más ingrato había sido aquel en que, al regresar del teatro, alegre y satisfecho y con una hermosa pluma para obsequiar a su mujer, no la encontró en el salón, ni en el despacho, y finalmente la halló en el dormitorio con el fatídico billete amoroso en la mano.

- ¿Qué significa esto?- le preguntó ella mostrándole la funesta misiva.

Como suele suceder, Esteban Arcadieivitch, al recordar la escena, sentía menos pesar por las causas que habían motivado el incidente que por la respuesta que había dado a las palabras de su mujer.

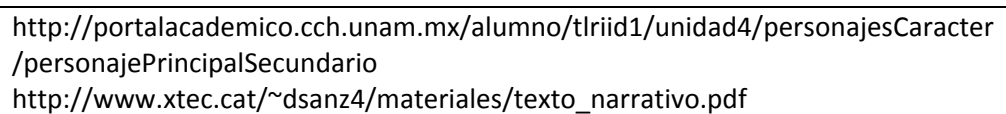
Le ocurrió lo que les ocurre a todos los que se ven sorprendidos en un acto vil y deshonesto. No supo ajustar la expresión de su rostro a las nuevas circunstancias surgidas entre él y su mujer tras el descubrimiento de la aventura. En vez de mostrarse ofendido, de negar, justificarse, pedir perdón, presentar excusas, incluso permanecer indiferente (todo habría sido preferible a que hiciera lo que hizo), su cara adoptó involuntariamente (“Manifestación refleja del espíritu”, pensó Esteban Arcadieivitch, que era un enamorado de la fisiología) una expresión alegre y dejó escapar su acostumbrada sonrisa de bondad, que en aquel momento resultaba sumamente tonta e inoportuna. Esta sonrisa fue lo más imperdonable. Al verla, Dolly, su esposa, se estremeció como bajo los efectos de algún dolor físico, soltó un torrente de palabras durísimas con su característica fogosidad, salió de su habitación dando un estruendoso portazo y desde aquel momento se negó a ver a su marido.



(En: Tolstoi León., Ana Karenina, México, Editorial Porrúa, 1993, p. 1-2)

[illegible]

Puedes encontrar más información sobre estos temas en el sitio que te proporcionamos a continuación.



**Evaluación**

---

**Indicaciones.** Elige la opción que corresponde a la respuesta correcta. Utiliza la hoja de respuestas para contestar la evaluación.

1. En el texto *Fito y el pesado*, de Ema Wolf, ¿quién corresponde a un personaje incidental?
  - A) Fito.
  - B) El elefante.
  - C) El lápiz.
  - D) El elefante del elefante.
  
2. De acuerdo al texto *Fito y el pesado*, de Ema Wolf, ¿cómo era el trato de Fito hacia el elefante?
  - A) Explosivo
  - B) Nostálgico
  - C) Paciente
  - D) Intolerante
  
3. ¿En qué ambiente se desarrolla el fragmento de Ana Karenina?
  - A) En un ambiente de duda.
  - B) En un ambiente de disgusto.
  - C) En un ambiente de nostalgia.
  - D) En un ambiente de violencia.
  
4. Las descripciones del ambiente de la historia de Ana Karenina hacen inferir que los Oblonsky:
  - a) eran de clase baja.
  - b) eran de clase media.
  - c) eran de clase media-alta.
  - d) eran de clase alta.

**TEMA 5. ELABORAR REPORTES DE ENTREVISTA COMO DOCUMENTOS DE APOYO AL ESTUDIO**

<b>Bloque IV</b>	<b>Aprendizajes esperados</b>
<b>Ámbito</b> Estudio.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica el uso de los guiones largos para marcar la participación del entrevistado y el entrevistador.</li> <li>• Reconoce el uso del discurso directo e indirecto en la entrevista.</li> <li>• Identifica criterios para la depuración del lenguaje de la entrevista al momento de transcribirla.</li> </ul>
<b>Práctica social del lenguaje</b> Elaborar reportes de entrevista como documentos de apoyo al estudio.	

**Introducción**

La entrevista consiste en un acto de comunicación entre dos o más personas (el entrevistador y el entrevistado o entrevistados) con el fin de obtener información u opinión sobre un tema específico.

Es un género periodístico a través del cual se puede dar a conocer el pensamiento de un experto en el ámbito artístico, cultural, educativo, científico, ciudadano, deportivo, etcétera.

Para realizar una entrevista siempre se debe partir de las preguntas: ¿a quién entrevistaremos? y ¿cuál es el propósito de la entrevista?

Si es una **entrevista informativa** su propósito será conocer hechos e información de un fenómeno de interés y, en el caso de la **entrevista de semblanza**, la información versará en torno a los pensamientos, costumbres y anécdotas de la propia vida del entrevistado.

Busca en dos fuentes distintas la definición de entrevista. Comparte las definiciones con tus compañeros y complementen sus respuestas.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



En caso de que tu entrevista vaya a ser publicada, debes:

- Seleccionar la información que será transcrita, ubicando aquellos datos que has recuperado para cubrir el propósito de la entrevista y eliminando los titubeos, muletillas, repeticiones o expresiones incompletas.
- Redactar una introducción. En ella se expresarán los objetivos que te motivaron a realizar la entrevista, su finalidad, la selección del tema y de las personas que se entrevistaron.

## Desarrollo

Al momento de redactar la entrevista, se puede hacer uso del diálogo de dos formas:

**Estilo directo:** reproduce las palabras exactas de los interlocutores. Para indicarlo, se colocan guiones, o bien se encierran las citas textuales entre comillas.

Ejemplo:

–¿Te consideras un perfeccionista?

–Soy el hombre más perfeccionista que conozco. Soy muy obsesivo trabajando, no me he vuelto despreocupado, pues es mi naturaleza esa obsesión por la perfección.

**Estilo indirecto:** reproduce la conversación pero no de forma textual.

Ejemplo:

Se realizó una entrevista con el señor Bonifacio Gómez acerca de su trabajo como síndico de su comunidad, y nos dijo que él nació en Churumuco pero que llegó a la comunidad de El sauce a la edad de 8 años, con sus papás, y que ahí ha vivido toda su vida. Nos dijo también que se dedica al cultivo de flores y hortalizas, y que las llevan a vender a San Isidro, pero que dejan algo de la producción para comer con la familia y algunas flores a la virgencita que cuida su casa.



La planeación de la entrevista es fundamental para garantizar el éxito de ésta. Después de elegir a quién se entrevistará, se debe establecer el propósito y recopilar información sobre el tema y la persona con quien se conversará. Finalmente se preparará el guión de entrevista.

#### **Guión de entrevista**

Es el bosquejo de las preguntas que se le harán al entrevistado. Estas preguntas son la guía para la orientación de la conversación y deben tener un orden de importancia.

Lee la siguiente entrevista y realiza las actividades.

#### **Entrevista De Jaime Fernández a Mario Molina (Fragmento)**

Mario Molina no pierde la sonrisa a pesar de que vivimos en un mundo difícil, donde la conciencia medioambiental en muchos casos se relega a un segundo plano. Este premio Nobel de Química sigue enamorado de la ciencia y confía en la capacidad de los investigadores para mejorar nuestro planeta.

**—A lo largo de su vida ha recibido muchos premios y menciones, como la reciente investidura como doctor honoris causa por la Universidad Complutense. ¿Estos galardones mantienen todavía su ilusión por la ciencia?**

—Es cierto que todavía me hace ilusión recibir premios y reconozco que no he perdido esa ilusión que empezó en mí desde muy niño. Descubrí lo interesante que es la ciencia al ver en un microscopio cómo es una gota de agua sucia. Después de aquello mi amor por la ciencia ha tenido varios pasos importantes. El compartir el gozo por la ciencia fue ya en la universidad, luego fue una gran satisfacción darme cuenta de que podía descubrir y describir aspectos de la ciencia que era yo el primero que lo hacía y, por último hacer investigación sabiendo que tiene impacto para la sociedad. Los reconocimientos son también muy emotivos y es claro que el premio Nobel es el más importante, pero todos los demás, incluidos los doctorados honoris causa, son muy agradables.

**—En eso que habla de la ciencia con impacto para la sociedad, los políticos ahora están dispuestos a financiar sólo la ciencia que se aplica de manera inmediata. ¿Qué le parece?**

—La evidencia de la utilidad de la investigación es tan clara, a distintos niveles, que para los políticos debería ser convincente el hecho de que los países con un desarrollo económico más vigoroso son los que invierten más en ciencia. Aunque eso debería ser suficiente, muchos políticos tienen una visión o muy limitada o muy a corto plazo o no están bien enterados de qué es la ciencia y cómo funciona. Habría que enseñar a todos desde niños el método científico, y hacerles ver que el nivel de vida que tenemos se debe, en gran medida, a los avances de la ciencia.

**—Usted descubrió la importancia que tenían los CFC (gases clorofluorocarbonos) en la destrucción de la capa de ozono. ¿Esa investigación surgió como ciencia básica o aplicada?**

—Originalmente estuvo basado nada más que en ciencia, pero después con diplomacia y comunicación con tomadores de decisiones se llegó a un acuerdo internacional para que ningún país produzca estos compuestos. Es quizás el primer acuerdo para un problema global, pero también, desgraciadamente, el único.

**–Ese acuerdo se fraguó en los años setenta y ochenta. La situación internacional ha cambiado mucho desde entonces. ¿Cree que ahora sería posible?**

–Ahora sería mucho más complicado, pero en aquel momento también hubo muchas dificultades, lo que pasa es que eventualmente pudimos hacer dos cosas: convencer directamente a jefes de Estado y a las industrias. Las grandes industrias químicas constituían un número relativamente pequeño y vieron que, a pesar de que la prohibición de los CFC podía tener un impacto económico para ellos, la ciencia sobre el tema estaba ya muy clara. Además, trabajando con ellos, se les explicó que si el acuerdo era internacional se abría un campo nuevo para producir compuestos que sustituyeran a los otros, así que todos podían seguir haciendo negocio, aunque fuese con unos compuestos distintos.

Lo distinto ahora con problemas como el cambio climático, que está muy generalizado porque involucra a la energía, es que se politizó. Grupos de interés han hecho campañas muy exitosas para desprestigiar la ciencia, sobre todo la que hay detrás de lo que puede pasar con el cambio climático. Lo hicieron además muy eficientemente y la comunidad científica ha sido muy lenta en responder porque no está organizada para hacerlo. Ahora el problema es trabajar con esas barreras de política.

**–¿Los científicos pueden luchar contra esas barreras políticas?**

–Son tan extremas en algunos casos, como Estados Unidos y el partido republicano, que yo tengo la expectativa de que esto se va a poder resolver en algunos años. La situación ridícula de regresar a la era de la astrología y cosas así no puede ser permanente.

Recuperado el 04 de marzo de 2013 de: [http://centromariomolina.org/wp-content/uploads/2012/05/Entrevista-Revistatribuna2965\\_junio2012.pdf](http://centromariomolina.org/wp-content/uploads/2012/05/Entrevista-Revistatribuna2965_junio2012.pdf)



**Analiza la entrevista y da respuesta a las preguntas.**

Pregunta	Respuesta
¿Se menciona el propósito de la entrevista al inicio de ésta?	
¿La entrevista está redactada con un estilo directo o indirecto?	
¿La entrevista refleja la búsqueda previa de información por parte del entrevistador, respecto al entrevistado?	
¿La entrevista es informativa o de semablanza?	
¿A qué ámbito pertenece la entrevista?	

### Uso de signos gráficos en el reporte de entrevista

- Cuando es necesario incluir una **cita textual** en el reporte, se utilizan comillas (“ ”)

Ejemplo:

“Soy una persona privilegiada, tengo salud y mi trabajo es mi pasatiempo favorito”

- Para **plasmar el diálogo entre entrevistador y entrevistado** se hace uso del guión largo (–); este indica las veces en que una persona u otra toma la palabra.

Ejemplo:

–¿Los científicos pueden luchar contra esas barreras políticas?

–Son tan extremas en algunos casos, como Estados Unidos y el partido republicano, que yo tengo la expectativa de que esto se va a poder resolver en algunos años. La situación ridícula de regresar a la era de la astrología y cosas así no puede ser permanente.

- Los **guiones** pueden ser utilizados también cuando es necesario **incluir acotaciones, notas o comentarios**.

Ejemplo:

“Elena es un milagro de la literatura. Tres condiciones se concentran en su obra, a saber: el dominio del idioma – **castellano y mexicanísimo** –; el manejo frecuentemente de la imaginación poética y un sentido, casi endiabulado e inocente, de la sátira y de la burla social”.

- Para **incluir comentarios** que expliquen las actitudes del entrevistado o algún dato importante que no es parte de la entrevista, pero vale la pena destacar, se hace uso de los paréntesis ( ).

Ejemplo:

–¿Esa forma de retener el tiempo te hace olvidar que ya no eres tan joven?

–(**Guarda silencio, respira profundo, y después contesta**) No tengo edad. No siento la edad. Obviamente que hay cosas, pero no siento la edad en ese aspecto. No siento que tenga edad, algo que decir: “Ahora me llegó el momento”.



Para saber más

Al redactar reportes de entrevistas debes evitar transcribir aquellas muletillas o ideas repetitivas del entrevistado (salvo que sea necesario por la intención de la entrevista).

Muletilla: Voz o frase que se repite mucho por hábito

Ejemplo:

*Es que, lo que pasa es que, sin ayuda no hace nada.*



Con color rojo escribe los signos de puntuación faltantes en el reporte de entrevista. Detecta las muletillas y enciérralas.

### ¿Imaginabas ser ídolo en el América?

Mmm... pues esque tenía la ilusión de estar allí. Una vez mi mamá, estando en el Estadio Azteca cuando tenía 10 años le dijo a mis tías: algún día voy a ver a mi hijo jugando allí. Y se le cumplió, ella tenía el presentimiento.

### ¿Cuál es el jugador que más te ha impresionado?

Se queda pensativo por un momento, luego responde Antonio Carlos Santos, aparte tuve el gusto de entre entrenar con él y pues... mmm, eso me cambió.

### ¿Cuál será la afición que menos te quiere?

Recuerdo que en Colombia la gente me odiaba. Hasta mi mamá tenía miedo de que viajara a Sudamérica para cumplir aquel partido de Copa Libertadores. Pero pues les metí tres goles a los colombianos y la gente me despidió aplaudiendo.

### ¿Recuerdas tu festejo donde imitaste a un perrito?

Este, lo que pasa es que en ese entonces Félix Fernández me ofendió cuando iba a tirar un penal, me dijo de todo y yo le dije: Ruégale a Dios que no lo meta porque te lo voy a festejar ahí. Y se me ocurrió hacerlo así.

### ¿Es difícil ser el personaje que eres?

Pensativo Es complicado. La prensa me ha atacado muchísimo y no me ha importado. Al contrario, tengo que trabajar más y callarle la boca a muchos.

(Adaptación). Recuperado el día 06 de marzo de 2013, de <http://www.bigsoccer.com/forum/showthread.php?t=101736>

### Cierre

En esta sesión pudiste identificar el uso correcto de los signos de puntuación más frecuentes en la elaboración de un reporte de entrevista, el uso del estilo directo e indirecto y la importancia de depurar la entrevista de muletillas innecesarias.

Puedes encontrar más información sobre este tema en el sitio que te proporcionamos a continuación.



[http://fp.educarex.es/fp/pruebas\\_acceso/2011/modulo\\_IV/lengua\\_y\\_literatura/4leng03.pdf](http://fp.educarex.es/fp/pruebas_acceso/2011/modulo_IV/lengua_y_literatura/4leng03.pdf)



## Evaluación

---

**Indicaciones.** Elige la opción que corresponde a la respuesta correcta. Utiliza la hoja de respuestas para contestar la evaluación.

1. ¿Cuál es el propósito de la entrevista a Mario Molina?
  - A) Conocer su trabajo, respecto a la importancia que tienen los CFC (gases clorofluorocarbonos).
  - B) Conocer su opinión respecto al panorama político y económico en el ámbito de la investigación científica.
  - C) Conocer cuántos galardones tiene.
  - D) Conocer su biografía.
2. ¿Cuál de los siguientes párrafos presenta un fragmento de entrevista redactado con estilo indirecto?
  - A) El Doctor Mario Molina nos platicó que a lo largo de su vida ha recibido muchos premios y menciones, como la reciente investidura como doctor honoris causa por la Universidad Complutense, pero que aún le hace ilusión recibir premios y reconoce que no ha perdido esa ilusión que empezó desde su niñez.
  - B) -Es cierto que todavía me hace ilusión recibir premios y reconozco que no he perdido esa ilusión que empezó en mí desde muy niño.
  - C) Al preguntarle respecto a su reciente investidura como doctor honoris causa por la Universidad Complutense, el doctor Molina señaló: “ Es cierto que todavía me hace ilusión recibir premios y reconozco que no he perdido esa ilusión que empezó en mí desde muy niño”.
  - D) Todavía me hace ilusión que me den premios y reconocimientos, y reconozco que no he perdido esa ilusión que comenzó desde niño.
3. Atendiendo a su propósito, la entrevista de la actividad 2 es de:
  - A) Cultura
  - B) Informativa
  - C) De semblanza
  - D) De tecnología
4. Imagina que entrevistarás al ganador del Premio Nobel, Mario Molina, para conocer el efecto de los gases clorofluorocarbonos en la capa de ozono. ¿Cuál de las siguientes opciones contiene las preguntas oportunas para tu entrevista?
  - A) ¿Qué son los gases clorofluorocarbonos? ¿Qué es la capa de ozono? ¿En dónde están contenidos los gases clorofluorocarbonos?
  - B) ¿Qué son los gases clorofluorocarbonos? ¿Qué daños han causado a la capa de ozono? ¿Qué alternativas se pueden plantear para revertir los daños?
  - C) ¿Qué es la capa de ozono? ¿En dónde está la capa de ozono? ¿Qué son los gases clorofluorocarbonos?
  - D) ¿Qué es un gas? ¿Qué son los gases clorofluorocarbonos? ¿Qué es la capa de ozono?

**SECCIÓN DE RESPUESTAS**  
.....**Tema 1****Actividad 1**

F, F, A, A, A

**Evaluación**

1. D
2. B
3. A
4. C

**Tema 2****Evaluación**

1. B
2. A
3. D

**Tema 3****Actividad 1**

c, f, g, h, b, a, d, e

**Actividad 2**

Señora, présteme, huevos, señores, quieren,  
bueno, todavía, muy pálido, modo, delgados,  
agrade, traen, doctor, columna, remedio.

**Evaluación**

1. D
2. B
3. B
4. D
5. A

**Tema 4****Evaluación**

1. D
2. C
3. B
4. D

**Tema 5****Evaluación**

1. B
2. A
3. C
4. B

**SECCIÓN DE  
HABILIDADES  
MATEMÁTICAS**





HOJA DE RESPUESTAS HABILIDADES MATEMÁTICAS	
Nombre	
Escuela	
Grado	
Grupo	

**Instrucciones:**

Contesta las preguntas de la evaluación de cada tema presentado, rellenando con lápiz el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

TEMA 1				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 5				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 2				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 6				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 3				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 7				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 4				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

TEMA 8				
No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



## TEMA 1. POTENCIAS NEGATIVAS

## Bloque I

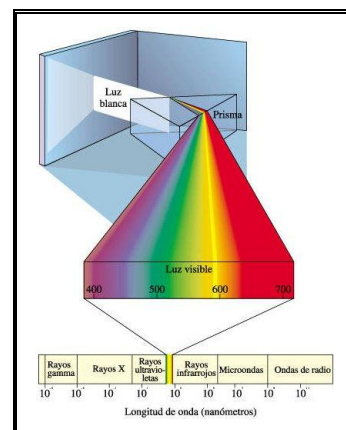
Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Problemas multiplicativos

Contenido: Significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo.

## Aprendizaje esperado:

Determina la expresión equivalente simplificada que resulta de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo.



## Introducción:



A la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir se le llama luz visible. En el extremo inferior de la región de luz visible comienza la región de **rayos ultravioleta** con una longitud de onda cercana a los  $10^{-7}$  metros, mientras que en el extremo superior de la región de luz visible se encuentran los **rayos infrarrojos** con una longitud de onda cercana a los  $10^{-6}$  metros. De acuerdo a la información anterior, ¿cuántas veces es mayor la longitud de onda de los rayos infrarrojos respecto de los rayos ultravioleta?

Si analizas el planteamiento notarás que aparecen dos cantidades en forma de **potencia con exponente negativo** y nos solicitan encontrar una relación entre las longitudes de onda de los rayos infrarrojos y los rayos ultravioleta. A continuación te presentamos algunos conceptos y procedimientos aritméticos relacionados con las potencias, en especial cuando éstas se presentan con exponente negativo.

## Desarrollo:



Para poder realizar lo que se pide en el problema de la introducción es necesario que repasemos algunos conceptos y procedimientos relacionados con la operación aritmética de potenciación.

Recordaremos lo que es la **operación de potenciación** y describiremos las principales **propiedades de las operaciones con potencias**. Finalmente definiremos lo que es la **potencia con exponente negativo** y cómo es que debemos aplicar las propiedades vistas cuando involucramos este tipo de cantidades.

La operación que consiste en multiplicar un factor natural reiteradamente se denomina **potencia de números naturales** y ésta es un caso particular de la multiplicación de números naturales. Cada multiplicación de factores reiterados puede escribirse en notación de potencia, así por ejemplo

## Recuerda



$$\begin{array}{ll}
 4 \times 4 \times 4 & \text{se escribe } 4^3 \\
 6 \times 6 \times 6 \times 6 & \text{se escribe } 6^4 \\
 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 & \text{se escribe } 2^7.
 \end{array}$$

Los elementos que aparecen en la notación de potencias se identifican como:

$$\underset{\text{base}}{5}^{\text{exponente} \leftarrow 3}$$

El conocimiento de algunas **propiedades de las operaciones con potencias** y su aplicación de éstas nos permite manejar esas operaciones con mayor soltura. Veamos algunas.

**Producto de potencias de igual base**

Al multiplicar por ejemplo  $2^5 \times 2^3$  se obtiene  $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$ . Análogamente, se comprueba que  $5^2 \times 5^4 = 5^6$ . Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

El **producto de dos potencias de igual base** es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la **suma de los exponentes** de las potencias que se multiplican.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Donde  $a$ ,  $m$  y  $n$  son números naturales.

Así, por ejemplo

$$13^3 \times 13^2 = 13^{3+2} = 13^5 \quad ; \quad 13^4 \times 13 = 13^{4+1} = 13^5 \quad ; \quad 13 \times 13 = 13^{1+1} = 13^2$$

Pero también

$$13^6 = 13 \times 13^5 = 13^2 \times 13^4 = 13^3 \times 13^3.$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en un producto de potencias cuyos exponentes sumen el exponente de la potencia original.

Es importante mencionar que esta propiedad es también aplicable cuando tenemos el producto de más de dos potencias de la misma base, por ejemplo,  $13^2 \times 13^5 \times 13^3$  se puede calcular de las siguientes tres maneras:

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = (13^2 \times 13^5) \times 13^3 = (13^{2+5}) \times 13^3 = 13^7 \times 13^3 = 13^{7+3} = 13^{10}$$

ó

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = 13^2 \times (13^5 \times 13^3) = 13^2 \times (13^{5+3}) = 13^2 \times 13^8 = 13^{2+8} = 13^{10}$$

ó

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = 13^{2+5+3} = 13^{10}$$

**Actividad 1**

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

( )

$$5^7 =$$

( )

$$5^2 \times 5^3 \times 5 =$$

( )

$$5^9 =$$

( )

$$5^4 \times 5^6 =$$

( )

$$5 \times 5^2 \times 5 =$$

a)  $5^5 \times 5^5$

b)  $5^2 \times 5^5$

c)  $5^3 \times 5^3 \times 5^3$

d)  $5^8$

e)  $5^6$

f)  $5^4$

g)  $5^{11}$



**Cociente de potencias de igual base**

Al dividir por ejemplo,  $\frac{2^5}{2^3}$  se obtiene  $\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2$ . Análogamente, se comprueba que  $\frac{7^6}{7^2} = 7^4$ . Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

El **cociente de dos potencias de igual base** es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la **diferencia de los exponentes** de las potencias que se dividen.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Donde  $a$ ,  $m$  y  $n$  son números naturales, con  $a \neq 0$  y  $n > m$ .

Así, por ejemplo

$$\frac{13^5}{13^2} = 13^{5-2} = 13^3 \quad ; \quad \frac{13^4}{13} = 13^{4-1} = 13^3$$

Pero también

$$13^2 = \frac{13^7}{13^5} = \frac{13^4}{13^2} = \frac{13^3}{13}.$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en un cociente de potencias cuya resta de sus exponentes de cómo resultado el exponente de la potencia original.

Observa que, si se toma un ejemplo similar a los anteriores,  $\frac{5^3}{5^2}$  representa la división  $\frac{125}{25}$ , cuyo cociente es 5. Pero si se maneja la misma división en términos de potencias, ya hemos visto que  $\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$ . De donde, por igualdad de resultados, tenemos que  $5^1 = 5$  y en general podemos decir que:

Cualquier número elevado a la **primera potencia** reproduce el mismo número.

$$a^1 = a$$

Ahora, ¿qué pasa si  $n = m$ ? Tal sería el caso de, por ejemplo,  $\frac{3^4}{3^4}$ . De hecho, estamos dividiendo  $\frac{81}{81}$ , cuyo cociente es 1. Pero si aplicamos el criterio anterior,  $\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0$ . Como ambos resultados deben coincidir, tenemos que  $3^0 = 1$  y en general podemos decir que:

Cualquier número elevado a la **potencia cero** reproduce la unidad.

$$a^0 = 1$$

Estos dos últimos resultados,  $a^1 = a$  y  $a^0 = 1$  nos dan elementos para decir que no siempre se cumple que la potencia de un número natural es mayor que dicho número.

**Actividad 2**

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

( )	$\frac{4^6}{4^4} =$	a)	$\frac{4^{10}}{4}$
( )	$\frac{4^5}{4^4} =$	b)	$4^7$
( )	$4^4 =$	c)	1
( )	$\frac{4^3}{4^3} =$	d)	$4^2$
( )	$\frac{4^{12}}{4^3} =$	e)	$\frac{4^6}{4^2}$
		f)	0
		g)	4

**Potencia de una potencia**

Podemos tener el caso de una potencia cuya base sea, a su vez, una potencia. Por ejemplo,  $(3^5)^2$ . Esta operación es equivalente a  $3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$ . También podemos verificar que  $(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$ . Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

La **potencia de una potencia** es otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es el **producto de los dos exponentes**.

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Donde  $a$ ,  $m$  y  $n$  son números naturales.

Así, por ejemplo

$$(5^2)^4 = 5^{2 \times 4} = 5^8 \quad ; \quad (6^3)^0 = 6^{3 \times 0} = 6^0 = 1$$

$$(11^3)^2 = 11^{3 \times 2} = 11^6 \quad ; \quad 32^2 = (2^5)^2 = 2^{5 \times 2} = 2^{10}$$

Pero también

$$7^4 = (7^2)^2$$

$$3^6 = (3^2)^3 = (3^3)^2$$

$$2^8 = (2^2)^4 = (2^4)^2$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en una potencia de otra potencia cuyo producto de sus exponentes de cómo resultado el exponente de la potencia original.

**Actividad 3**

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

( )	$3^{12} =$	a) $3^9$
( )	$(3^2)^4 =$	b) $3^{10}$
( )	$(3^0)^9 =$	c) $1$
( )	$(3^5)^2 =$	d) $81^3$
( )	$(3^3)^6 =$	e) $3^8$
		f) $3^{18}$
		g) $0$

**Potencia de una multiplicación de potencias**

También podemos tener el caso de una potencia cuya base sea una multiplicación de potencias (no necesariamente de la misma base). Por ejemplo la operación  $(2^3 \times 5^2)^4$  es equivalente a

$$(2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2).$$

Ahora, si aplicamos las leyes conmutativa y asociativa de la multiplicación tenemos que lo anterior es equivalente a

$$(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3) \times (5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2) = (2^3)^4 \times (5^2)^4 = 2^{3 \times 4} \times 5^{2 \times 4} = 2^{12} \times 5^8.$$

Y de un modo análogo en cualquier otro caso. Podemos entonces en general decir que

La **potencia de una multiplicación de potencias** es otra multiplicación de potencias, cada una de las cuales tiene la misma base inicial y como exponente, **el respectivo producto de exponentes**.

$$(a^n \times b^m)^p = a^{n \times p} \times b^{m \times p}$$

Donde  $a, b, m, n$  y  $p$  son números naturales.

Así, por ejemplo

$$(4^2 \times 5^3)^2 = 4^{2 \times 2} \times 5^{3 \times 2} = 4^4 \times 5^6 \quad ; \quad (3 \times 2^2 \times 5^6)^4 = 3^4 \times 2^8 \times 5^{24}$$

Pero también

$$2^6 \times 3^9 \times 5^{15} = (2^2 \times 3^3 \times 5^5)^3 \quad ; \quad 7^4 \times 3^8 \times 16 = 7^4 \times 3^8 \times 2^4 = (7 \times 3^2 \times 2)^4$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos. Observa que en estos dos últimos ejemplos lo que hicimos fue extraer el factor común del grupo de exponentes. Así, para los exponentes 6, 9 y 15 el factor común es 3 y para los exponentes 4, 8 y 4 el factor común es 4.

**Actividad 4**

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

- |     |                                     |    |                                      |
|-----|-------------------------------------|----|--------------------------------------|
| ( ) | $(5^3 \times 7^2)^4 =$              | a) | 0                                    |
| ( ) | $6^{12} \times 4^{15} \times 7^9 =$ | b) | $(5^3 \times 7^2)^2$                 |
| ( ) | $(10^2 \times 9^5 \times 2^3)^0 =$  | c) | $5^{12} \times 7^8$                  |
| ( ) | $5^6 \times 7^4 =$                  | d) | $10^2 \times 9^5 \times 2^3$         |
| ( ) | $(6^4 \times 4^3 \times 7^2)^5 =$   | e) | $(6^4 \times 4^5 \times 7^3)^3$      |
|     |                                     | f) | $6^{20} \times 4^{15} \times 7^{10}$ |
|     |                                     | g) | 1                                    |

**Potencias con exponente negativo**

Al final del apartado del cociente de potencias de igual base, cuya expresión generalizada es  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ , vimos que si  $n = m$ , entonces sucedía que el resultado era  $a^0 = 1$ . Pero ¿qué sucede cuando  $n < m$ ? Tal sería el caso de, por ejemplo,  $\frac{3^4}{3^7}$ . Si aplicamos la propiedad del cociente de dos potencias de igual base,  $\frac{3^4}{3^7} = 3^{4-7} = 3^{-3}$ . ¿Qué significado tienen una potencia cuyo exponente es un número negativo?

Para responder a esta pregunta consideremos una potencia con la misma base pero con signo positivo  $3^3$  y efectuemos el producto de esta con su correspondiente de signo negativo  $3^{-3}$ .

$$3^3 \times 3^{-3} = 3^{3+(-3)} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

Ahora efectuemos el producto de la potencia con exponente positivo  $3^3$  con su recíproco  $\frac{1}{3^3}$ .

$$3^3 \times \frac{1}{3^3} = \frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

Como ambos productos nos dan el mismo resultado, si aplicamos la propiedad transitiva de la igualdad tenemos que

$$3^3 \times 3^{-3} = 3^3 \times \frac{1}{3^3}$$

De donde finalmente vemos que

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

Y de un modo análogo en cualquier otro caso. Podemos entonces en general decir que

Una **potencia con exponente negativo** es igual a una fracción cuyo numerador es uno y cuyo denominador es una potencia de la misma base con exponente igual en valor numérico, pero con signo positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Donde  $a$  es un número natural y  $n > 0$ .

Así, por ejemplo

$$(7^2)^{-1} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

$$4^{-2} \times 4^{-3} = 4^{-2-3} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5}$$

$$(3^4 \times 3^2)^{-3} = (3^{4+2})^{-3} = (3^6)^{-3} = 3^{-18} = \frac{1}{3^{18}}$$

$$(2^{-2} \times 2^{-5})^{-1} = (2^{-7})^{-1} = \left(\frac{1}{2^7}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^7}} = 2^7$$

$$(6^2 \times 9^2)^{-4} = 6^{(2)(-4)} \times 9^{(2)(-4)} = 6^{-12} \times 9^{-8} = \frac{1}{6^{12}} \times \frac{1}{9^8}$$

Pero también

$$\frac{1}{6^4} = 6^{-4}$$

$$\frac{1}{5^4} \times \frac{1}{3^6} = 5^{-4} \times 3^{-6}$$

$$\frac{1}{7^{-6}} \times \frac{1}{5^{-4}} = 7^{-(-6)} \times 5^{-(-4)} = 7^6 \times 5^4$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos.

#### Actividad 5



Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

( )  $(6^2)^{-3} =$

( )  $6^{-4} \times 6^{-3} =$

( )  $(6^3 \times 6^5)^{-2} =$

( )  $(6^{-1} \times 6^{-4})^{-2} =$

( )  $(6^3 \times 3^4)^{-3} =$

a)  $6^{10}$

b)  $6^9 \times 3^{12}$

c)  $\frac{1}{6^6}$

d)  $\frac{1}{6^9} \times \frac{1}{3^{12}}$

e)  $\frac{1}{6^{10}}$

f)  $\frac{1}{6^7}$

g)  $\frac{1}{6^{16}}$

Ahora ya estamos en condiciones de responder al planteamiento hecho en la introducción:

**A la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir se le llama luz visible. En el extremo inferior de la región de luz visible comienza la región de rayos ultravioleta con una longitud de onda cercana a los  $10^{-7}$  metros, mientras que en el extremo superior de la región de luz visible se encuentran los rayos infrarrojos con una longitud de onda cercana a los  $10^{-6}$  metros. De acuerdo a la información anterior, ¿cuántas veces es mayor la longitud de onda de los rayos infrarrojos respecto de los rayos ultravioleta?**

De acuerdo con el problema, las longitudes de onda de los rayos infrarrojos tienen un orden de magnitud de  $10^{-6}$  metros, mientras que las longitudes de onda de los rayos ultravioleta tienen un orden de magnitud de  $10^{-7}$  metros. Para determinar el número de veces que es mayor la longitud de onda de los rayos infrarrojos respecto de los rayos ultravioleta debemos encontrar la razón de sus órdenes de magnitud, de manera que

$$\frac{10^{-6}}{10^{-7}} = 10^{-6-(-7)} = 10^{-6+7} = 10^1 = 10 \quad \text{ó} \quad \frac{10^{-6}}{10^{-7}} = \frac{\frac{1}{10^6}}{\frac{1}{10^7}} = \frac{10^7}{10^6} = 10^{7-6} = 10^1 = 10$$

Por lo que decimos que las longitudes de onda de los rayos infrarrojos son **10 veces mayores** a las longitudes de onda de los rayos ultravioleta.

### Cierre:



En este tema hemos hecho un repaso breve sobre lo que es la operación de potenciación, las principales propiedades de las operaciones con potencias y las potencias con exponente negativo. Así mismo, mostramos la utilidad de las operaciones y propiedades de las potencia en la solución de situaciones cotidiana.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las operaciones con potencias.

Propiedad	Expresión generalizada
Producto de dos potencias de igual base	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
Cociente de dos potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
Potencia de una multiplicación de potencias	$(a^n \times b^m)^p = a^{n \times p} \times b^{m \times p}$
Número elevado a la primera potencia	$a^1 = a$
Número elevado a la potencia cero	$a^0 = 1$
Potencia con exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Como puedes apreciar, en principio se trata de formas equivalentes de escribir una misma expresión, pero indudablemente aportan también ciertas facilidades a la hora de efectuar algunos cálculos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

### Para saber más...



[http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b04\\_t01\\_s01\\_descartes/TS\\_1\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t01_s01_descartes/TS_1_index.html)

[http://odas.educarchile.cl/objetos\\_digitales/odas\\_matematicas/23\\_potencias\\_exponente\\_-2\\_-3/LearningObject/content/io\\_1.swf?version=0.18](http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/23_potencias_exponente_-2_-3/LearningObject/content/io_1.swf?version=0.18)

[http://biblioteca.itson.mx/oa/dip\\_ago/leyes\\_exponentes/index.swf](http://biblioteca.itson.mx/oa/dip_ago/leyes_exponentes/index.swf)

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. ¿Cuál de los puntos mostrados sobre la siguiente recta numérica podría corresponder a  $n^{-1}$  si  $n$  es número natural (entero positivo)?



- A) P
- B) Q
- C) R
- D) S

2. ¿Cuál es la expresión que corresponde a la potencia de  $(4)^{-2}$ ?

- A) -16
- B)  $-\frac{1}{16}$
- C)  $\frac{1}{16}$
- D) 16

3. ¿Cuál de las opciones corresponde a al resultado de simplificar la expresión  $(2^3 \times 2^2)^{-1}$ ?

- A) -32
- B)  $-\frac{1}{32}$
- C)  $\frac{1}{32}$
- D) 32

4. ¿Cuál de las opciones corresponde a una expresión equivalente de  $(5^{-2} \times 5^{-4})^{-3}$ ?

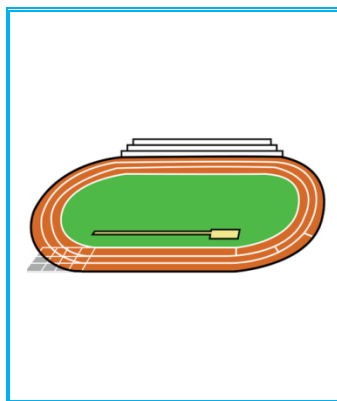
- A)  $5^{18}$
- B)  $\frac{1}{5^{18}}$
- C)  $-5^{18}$
- D)  $-\frac{1}{5^{18}}$

5. ¿Cuál de las opciones corresponde a una expresión equivalente de  $(5 \times 3^2)^{-2}$ ?

- A)  $5^2 \times 3^4$
- B)  $\frac{1}{5^2} \times \frac{1}{3^4}$
- C)  $-(5^2 \times 3^4)$
- D)  $-(\frac{1}{5^2} \times \frac{1}{3^4})$

**TEMA 2. ÁNGULOS ENTRE PARALELAS Y UNA SECANTE****Bloque I****Eje temático:** Espacio, forma y medida**Tema:** Figuras y cuerpos**Contenido:** Identificación de las relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal.**Aprendizaje esperado:**

Identifica relaciones entre ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas con una recta transversal.

**Introducción:**

El profesor de deportes del grupo de Erick está organizando una carrera de 200 metros con vallas en una pista de atletismo. Para evitar accidentes el profesor ha indicado a sus alumnos que en su turno se coloquen en los vértices de los ángulos correspondientes que forman las líneas que delimitan los carriles y la línea que indica la posición de salida. Erick no entendió muy bien la indicación ya que no sabe cuáles son los ángulos correspondientes. ¿Podrías ayudar a Erick con esta duda?

Si analizas el problema notarás que las líneas que delimitan los carriles son rectas *paralelas* y la línea que indica la posición de salida es una *transversal* que corta las paralelas. Por tanto, para ayudar a Erick necesitas aprender a identificar los tipos de ángulos que se forman cuando dos o más rectas paralelas son cortadas por una transversal.

**Desarrollo:**

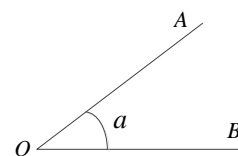
A continuación te presentamos la definición de algunos conceptos básicos relacionados con rectas y ángulos, para posteriormente abordar los tipos de ángulos que se forman cuando dos o más rectas paralelas son cortadas por una transversal, así como sus principales propiedades.

**Rectas y ángulos**

Un **ángulo** es una región del plano limitada por dos segmentos de recta con un origen común. Los segmentos de recta se conocen como los lados del ángulo y el punto que identifica el origen común de los lados se denomina **vértice del ángulo**.

**Recuerda**

En la figura mostrada, los lados del ángulo son  $OA$  y  $OB$  y el punto  $O$  es el vértice del ángulo. Un ángulo puede denotarse con la letra que indica su vértice, pero también puede denotarse con tres letras de las cuales la primera y la tercera denotan un punto ubicado en cada uno de los lados del ángulo, mientras que la segunda indica el vértice.

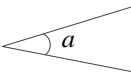
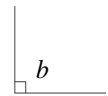
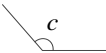
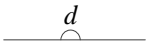




De acuerdo con la figura podemos denotar el ángulo como  $\angle O$  o  $\angle AOB$ . Una tercera opción es identificar al ángulo con una letra minúscula ubicada en su interior, en este caso denotamos al ángulo como  $\angle a$ . Nota que el símbolo  $\angle$  significa “ángulo”.

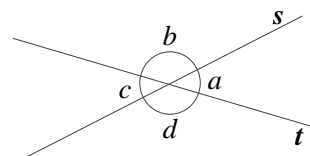
Los ángulos denotan qué tanto está rotado uno de los lados que lo forman respecto del otro, por lo que éstos se miden considerando la abertura que existe entre sus lados.



Básicamente, podemos clasificar a los ángulos de acuerdo a la medida de su abertura:

Tipo de ángulo	Descripción	
Ángulo agudo	Mide más de $0^\circ$ y menos de $90^\circ$ . $\angle a$ es agudo	
Ángulo recto	Mide $90^\circ$ y las semirrectas que lo forman son perpendiculares. $\angle b$ es recto	
Ángulo obtuso	Mide más de $90^\circ$ y menos de $180^\circ$ . $\angle c$ es obtuso	
Ángulo cóncavo	Mide más de $0^\circ$ y menos de $180^\circ$ . $\angle a$ , $\angle b$ y $\angle c$ son cóncavos	
Ángulo colineal (o llano)	Mide $180^\circ$ y sus lados son prolongación uno del otro. $\angle d$ es colineal	
Ángulo convexo	Mide más de $180^\circ$ y menos de $360^\circ$ . $\angle e$ es convexo	
Ángulo de una vuelta (o perigonal)	Mide $360^\circ$ y sus lados coinciden. $\angle f$ es de una vuelta	

Adicionalmente, se tienen otras clasificaciones cuando nos encontramos con parejas de ángulos, como en la situación de la derecha. Observa que se trata de **dos rectas secantes**  $s$  y  $t$  (no necesariamente perpendiculares). En la figura, aparecen cuatro ángulos ( $\angle a$ ,  $\angle b$ ,  $\angle c$  y  $\angle d$ ). Entre ellos, por parejas, se establecen las relaciones siguientes:



**Ángulos opuestos por el vértice** son los formados por las semirrectas  $s$  y  $t$ , y por sus prolongaciones en sentidos opuestos. Así, son opuestos por el vértice los ángulos  $a$  y  $c$ , y los ángulos  $b$  y  $d$ .

**Ángulos adyacentes** son ángulos que comparten un vértice y un lado, y que tienen los otros dos lados constituidos por semirrectas opuestas. En la figura, son pares de ángulos adyacentes los constituidos por los ángulos  $a$  y  $d$ ,  $c$  y  $d$ ,  $c$  y  $b$ ,  $b$  y  $a$ .

Por definición, la unión de dos ángulos adyacentes genera un ángulo llano; por consiguiente, los ángulos adyacentes son **suplementarios** (suman  $180^\circ$ ). De aquí se deduce que los ángulos opuestos por el vértice son **congruentes** (tienen la misma medida), ya que poseen el mismo suplemento; por ejemplo, los ángulos  $a$  y  $c$  tienen como suplemento el ángulo  $b$  (o el ángulo  $d$ ).

### Dos rectas paralelas y una secante

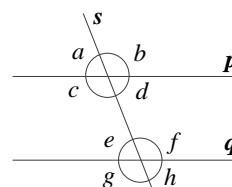
$\underline{\quad\quad\quad} p$   
 $\underline{\quad\quad\quad} q$

Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común, es decir, por más que se les prolongue no se cortan. Para denotar que una recta es paralela a otra usamos el símbolo  $\parallel$ . En la figura de la izquierda la recta  $p$  es paralela a la recta  $q$ . Escribimos  $p \parallel q$ .

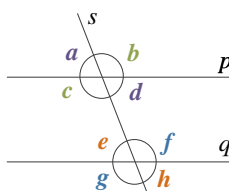
#### Recuerda



Otra situación interesante se presenta cuando dos rectas paralelas  $p$  y  $q$  son cortadas por una recta transversal (secante)  $s$ , no necesariamente perpendicular a las rectas dadas, como se muestra en la figura de la derecha. En la figura podemos observar que en esta configuración se forman ocho ángulos (señalados con letras, desde la  $a$  hasta la  $h$ ). Estos ángulos se relacionan de distintas maneras que vamos a describir a continuación.

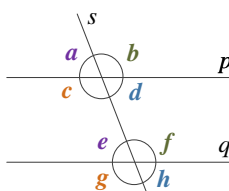


- En total, se forman cuatro pares de **ángulos opuestos por el vértice**:  $\angle a$  y  $\angle d$ ;  $\angle b$  y  $\angle c$ ;  $\angle e$  y  $\angle h$ ;  $\angle f$  y  $\angle g$ . En la figura de abajo, cada par de ángulos opuestos por el vértice se muestra del mismo color.



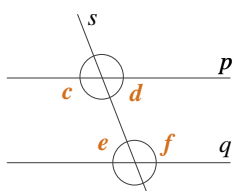
Ángulos opuestos por el vértice

- Podemos ver esta situación como una “duplicación” de la situación de dos rectas secantes (descrita en la página anterior); de manera que, alrededor de cada punto de intersección de  $s$  con  $p$  y  $q$  se genera la misma situación, y los ángulos se “corresponden” por pares:  $\angle a$  y  $\angle e$ ;  $\angle b$  y  $\angle f$ ;  $\angle c$  y  $\angle g$ ;  $\angle d$  y  $\angle h$  se denominan, en cada caso, **ángulos correspondientes**. En la figura de abajo, cada par de ángulos correspondientes se muestra del mismo color.

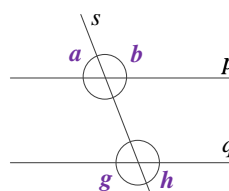


Ángulos correspondientes

- Por otro lado, podemos ver que cuatro ángulos quedan entre las rectas paralelas y por esta razón se denominan **ángulos internos** ( $\angle c$ ,  $\angle d$ ,  $\angle e$  y  $\angle f$ ); mientras que los cuatro restantes se conocen como **ángulos externos** ( $\angle a$ ,  $\angle b$ ,  $\angle g$  y  $\angle h$ ), ya que se ubican en el lado exterior de cada paralela.

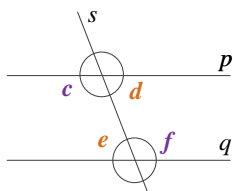


Ángulos internos

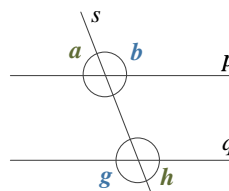


Ángulos externos

- Otra relación importante se da entre pares de ángulos ubicados en lados *alternos* de la transversal  $s$ . En la región interna las parejas  $\angle c$  y  $\angle f$ ;  $\angle d$  y  $\angle e$  se denominan, en cada caso, **alternos internos**. Y en la región externa, las parejas  $\angle a$  y  $\angle h$ ;  $\angle b$  y  $\angle g$  se denominan, en cada caso, **alternos externos**. En las figuras de abajo, cada par de ángulos alternos (internos o externos) se muestra del mismo color.



Ángulos alternos internos



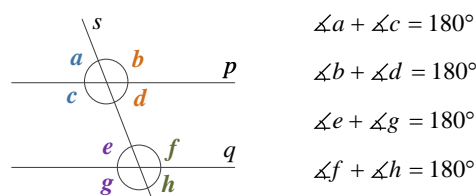
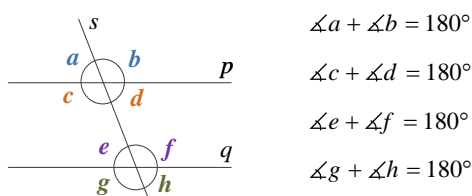
Ángulos alternos externos

Existe una propiedad común respecto a las medidas de los diversos tipos de *ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante*.

Son **congruentes** (miden lo mismo) cada par de ángulos:

- Opuestos por el vértice
- Alternos internos
- Correspondientes
- Alternos externos

Por otra parte, sabemos que la suma de medidas de todas las parejas de ángulos adyacentes da  $180^\circ$ . En las figuras de abajo, cada par de ángulos adyacentes se muestra del mismo color.

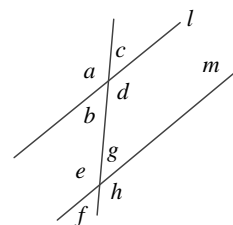


Aplicando las propiedades anteriores se podemos saber la medida de los ocho ángulos a partir del conocimiento de la medida de unos de ellos. Veamos el siguiente ejemplo.

Si en la figura de la derecha las rectas  $l$  y  $m$  son paralelas y el  $\angle c$  mide  $35^\circ$ , ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos restantes?

El ángulo  $b$  es opuestos por el vértice con el ángulo  $c$ , de manera que:

$$\angle b = \angle c = 35^\circ$$



Los ángulos  $a$  y  $d$  miden lo mismo ya que ambos son suplementarios con el ángulo  $c$ , entonces:

$$\begin{aligned}\angle a + \angle c &= 180^\circ & \angle c + \angle d &= 180^\circ \\ \angle a &= 180^\circ - \angle c & \angle d &= 180^\circ - \angle c \\ \angle a &= 180^\circ - 35^\circ & \angle d &= 180^\circ - 35^\circ \\ \angle a &= 145^\circ & \angle d &= 145^\circ\end{aligned}$$

Para saber la medida del resto de los ángulos podemos tomar dos caminos.

Usando la definición de ángulos correspondientes:

$$\begin{aligned}\angle e &= \angle a \\ &= 145^\circ \\ \angle f &= \angle b \\ &= 35^\circ \\ \angle g &= \angle c \\ &= 35^\circ \\ \angle h &= \angle d \\ &= 145^\circ\end{aligned}$$

Usando la definición de ángulos alternos internos y ángulos alternos externos:

$$\begin{aligned}\angle e &= \angle d \\ &= 145^\circ \\ \angle f &= \angle c \\ &= 35^\circ \\ \angle g &= \angle b \\ &= 35^\circ \\ \angle h &= \angle a \\ &= 145^\circ\end{aligned}$$

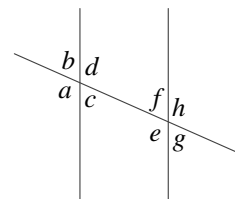
Como ves, podemos tomar distintos caminos para encontrar la medida de todos los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal. Habrás notado en el ejemplo anterior que aparecen sólo dos valores distintos para los ocho ángulos, de manera que cuatro ángulos miden  $35^\circ$ , mientras que los cuatro restantes miden  $145^\circ$ . Esta situación se conserva para cualquier arreglo de dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

**Actividad 1**

En figura de la derecha, observa las rectas paralelas que son cortadas por una transversal y realiza lo que se indica en cada ejercicio.



1. Encierra las parejas de ángulos correspondientes. ¿Cuántas parejas encontraste?
2. Identifica los ángulos alternos internos y los alternos externos. ¿Cuántas parejas encontraste de cada tipo?
3. Si el ángulo  $e$  mide  $115^\circ$ , ¿cuánto miden los otros siete ángulos?



Ahora ya estamos en condiciones de responder al cuestionamiento hecho en la introducción:

*El profesor de deportes del grupo de Erick está organizando una carrera de 200 metros con vallas en una pista de atletismo. Para evitar accidentes el profesor ha indicado a sus alumnos que en su turno se coloquen en los vértices de los ángulos correspondientes que forman las líneas que delimitan los carriles y la línea que indica la posición de salida. Erick no entendió muy bien la indicación ya que no sabe cuáles son los ángulos correspondientes. ¿Podrías ayudar a Erick con esta duda?*

Ahora sabemos que una pareja de ángulos correspondientes es aquella formada por ángulos que se *corresponden* en cada punto de intersección de la recta transversal (línea de salida) con las rectas paralelas (líneas que delimitan los carriles). En la figura de la derecha hemos ilustrado esta situación, considerando una pista de dos carriles. Hemos marcado con estrellas de un mismo color, las dos parejas de ángulos correspondientes en los que se deben de colocar los competidores detrás de la línea de salida.

**Cierre:**

Hasta aquí hemos repasado algunos aspectos relacionados con rectas y ángulos. En especial vimos la forma en que se identifican y nombran los distintos pares de ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal (secante), así como sus principales propiedades.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más...

<http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/11/3.swf>



<http://contenidos.educarex.es/mci/2004/18/alumno.swf>

**Evaluación:**

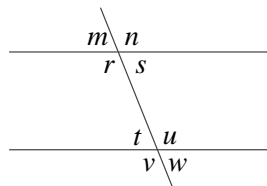
Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Selecciona la opción de respuesta que indique correctamente el número de pares de ángulos correspondientes que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 8

Observa la siguiente figura y responde los siguientes dos reactivos.



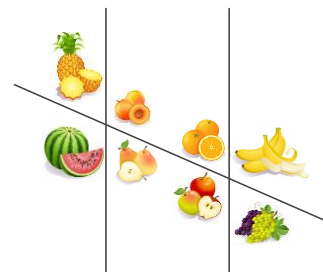
2.  $\angle m$  y  $\angle w$  forman una pareja de ángulos:

- A) Adyacentes
- B) Alternos externos
- C) Correspondientes
- D) Opuestos por el vértice

3.  $\angle n$  y  $\angle u$  forman una pareja de ángulos:

- A) Adyacentes
- B) Alternos externos
- C) Correspondientes
- D) Opuestos por el vértice

Observa la siguiente figura y responde los siguientes dos reactivos.



4. Selecciona la opción de respuesta que presente una pareja de frutas alternas externas.

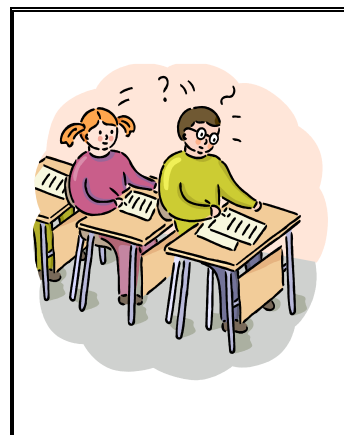
- A) Plátanos y sandías
- B) Peras y naranjas
- C) Sandías y duraznos
- D) Naranjas y piñas

5. Selecciona la opción de respuesta que presente una pareja de frutas correspondientes.

- A) Piñas y uvas
- B) Duraznos y manzanas
- C) Uvas y naranjas
- D) Manzanas y sandías

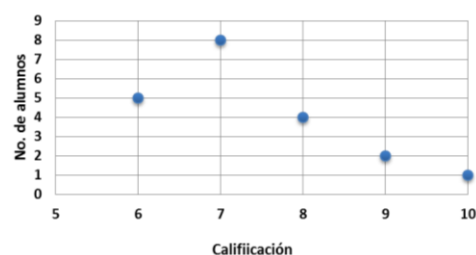
**TEMA 3. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL****Bloque I****Eje temático:** Manejo de la información**Tema:** Análisis y representación de la información**Contenido:** Análisis de casos en los que la media aritmética o mediana son útiles para comparar dos conjuntos de datos.**Aprendizaje esperado:**

Emplea las medidas de tendencia central para comparar el comportamiento de 2 conjuntos de datos referidos a una misma situación y que son representados gráficamente o en tablas.

**Introducción:**

La gráfica de la derecha muestra la distribución de calificaciones del último examen parcial que se aplicó a un grupo de 20 alumnos de primer grado de una escuela secundaria.

De acuerdo con la información presentada en la gráfica, ¿Cuál fue la calificación que se presentó con mayor frecuencia en el grupo?; ¿Cuál fue el promedio de este grupo en el examen?

**Examen de Matemáticas**

Podríamos encontrar distintas formas para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación anterior, de hecho la respuesta a la primera pregunta es un tanto sencilla pues basta con saber interpretar la información de la gráfica, sin embargo la segunda pregunta no es tan sencilla y debemos hacer algunos cálculos para llegar a la respuesta. En este tema describiremos lo que en estadística se conoce como medidas de tendencia central y mostraremos su utilidad para analizar y comparar conjuntos de datos referidos a una misma situación.

**Desarrollo:**

Una parte de la *Estadística Descriptiva* se encarga específicamente de determinar lo que conocemos como **medidas de tendencia central**, algunas de las cuales están directamente relacionadas con los cuestionamientos de la situación planteada en la introducción. En este tema describiremos cada una de estas medidas y mostraremos su utilidad para extraer información valiosa de situaciones que se nos presentan mediante un conjunto de datos.

La **Estadística Descriptiva** es la parte de la estadística que trata sobre los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de datos originados a partir de los fenómenos en estudio. Los datos pueden ser resumidos numéricamente o gráficamente.

**Recuerda****Medidas de Tendencia Central**

Una vez que se han recolectado y organizado los datos originados por la observación de un fenómeno natural o social, por la repetición de un experimento, por la aplicación de alguna encuesta, etc. Éstos se pueden presentar por medio de tablas (de frecuencias) o gráficas. En la situación planteada en la introducción, los datos organizados se han presentado en forma de gráfica, pero no siempre es así y frecuentemente lo que tenemos a disposición es la tabla de frecuencias por la cual fue desarrollada la gráfica, en este caso particular la tabla que sirvió de base para hacer la gráfica debió haber sido una como la siguiente.

Observando la gráfica o la tabla podemos obtener alguna información sobre las calificaciones de los alumnos, por ejemplo podemos observar que la calificación menor fue 6, la mayor 10 y la calificación que más se repitió fue 7. De hecho esta última observación es la respuesta a la primera pregunta que se planteó en la introducción, sin embargo, ¿qué sucede con la segunda pregunta?, ¿cómo calculamos el promedio?

Ya habrás notado que aunque se organicen los datos en una forma útil y significativa en tablas o gráficas en ocasiones es necesario disponer de información que describa a todo el conjunto de datos de manera precisa. Una forma útil de describir a un grupo de datos en su totalidad es encontrar algunos números que lo representen.

Calificación	No. de alumnos
6	5
7	8
8	4
9	2
10	1

Una de las características que se presenta en múltiples *distribuciones de frecuencias* es que los datos se acumulan alrededor de algunos *valores centrales* situados entre los dos extremos de la variable que se estudia. Esos valores son conocidos en la estadística como **medidas de tendencia central**, ya que están generalmente localizados hacia el medio o centro de una distribución en la que la mayoría de los datos tienden a concentrarse.

La tendencia central de un conjunto de datos generalmente es definida por tres parámetros estadísticos conocidos como **la moda, la media aritmética y la mediana**.

Una **distribución de frecuencias** es una forma de organizar un conjunto de datos para resumir la información que éstos aportan. Esta puede presentarse en forma de tabla o gráfico y en ella se presentan en orden creciente los valores observados de la variable de interés, así como la cantidad de veces que ocurren, es decir, sus respectivas *frecuencias absolutas*.

**Recuerda**



## Moda

La **moda** ( $M_o$ ) es el valor que se repite más veces en una distribución, es decir, el valor con mayor frecuencia. En una distribución de frecuencias específica podemos encontrar más de una moda, una sola moda o ninguna moda (cuándo no se repite ningún valor).

La moda es la medida de tendencia central más fácil de obtener debido a que ésta puede encontrarse simplemente por inspección más que por cálculos.

Observando la gráfica o la tabla de frecuencias de la situación planteada en la introducción podemos notar que la moda de calificaciones fue 7 ya que ésta se repite 8 veces (es decir, tuvo la mayor frecuencia).

$$M_o = 7$$

## Media aritmética

La **media aritmética** ( $\bar{x}$ ) es la sumatoria de todos los valores de un conjunto de datos, dividida entre el número total ( $n$ ) de datos. Es la medida de tendencia central más comúnmente utilizada ya que representa el punto alrededor del cual los valores se aglutinan. La media aritmética puede coincidir o no con alguno de los datos del conjunto.

La media aritmética es también conocida como el valor **promedio** de todos los datos ya que para obtenerla, se suman todos los datos y esta suma se divide entre el número de datos considerados.

Con el fin de presentar una fórmula generalizada para calcular la media aritmética de cualquier conjunto de datos hemos designado con la letra  $n$  al número de datos del conjunto que estemos analizando; a los datos del conjunto los identificamos con los símbolos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , donde, por ejemplo,  $x_5$  representa el quinto dato y así hasta el dato número  $n$ ; y finalmente denotamos a la media aritmética con el símbolo  $\bar{x}$ , de manera que la fórmula que permite calcular su valor se expresa así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Ejemplo 1:

Se ha tomado el tiempo de espera para pasar a ventanilla de los últimos 12 clientes que ingresaron a un banco y los resultados en minutos son 11, 13, 9, 10, 8, 12, 11, 14, 9, 13, 11, 8. Determina el promedio de tiempo de espera de estas personas.

En este caso tenemos 12 datos, es decir  $n=12$ . Empleando la fórmula dada tenemos que la media aritmética (o promedio) se calcula como

$$\bar{x} = \frac{11+13+9+8+12+11+14+9+13+11+8}{12} = \frac{129}{12} = 10.75$$

Lo cual quiere decir que en promedio las 12 personas esperaron 10 minutos y 45 segundos (ya que 0.75 de un minuto equivale a  $\frac{3}{4}$  de minuto, es decir, 45 segundos).

Como puedes ver, para calcular la media aritmética no hace falta que los datos estén ordenados, ya que la suma es conmutativa.

El resultado de la media aritmética es afectado por cada valor. Los valores extremos influyen en la media aritmética y en algunos casos pueden distorsionarla tanto que resulte inconveniente como una medida de tendencia central.

En el caso planteado en la introducción los datos no se han presentado “uno a uno” como en el ejemplo anterior, más bien los tenemos organizados por frecuencias. En estos casos la suma de todos los datos (“uno a uno”), puede sustituirse por la suma de los productos de cada dato  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  que aparece en la tabla por su frecuencia correspondiente  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ . De esta forma, la expresión adecuada para el cálculo de la media es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + x_3 \times f_3 + \dots + x_k \times f_k}{n}$$

Observa que en el numerador de la fórmula anterior, el subíndice de  $x$  y  $f$  del último sumando es  $k$  y no  $n$  ya que ahora habrá menos sumandos, porque ya no se suman “uno a uno” los datos repetidos. Es decir, los valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , representan ahora cada uno de los valores *distintos* de los datos y son éstos los que aparecen en la primera columna de la tabla de frecuencias.

De acuerdo a la fórmula presentada para calcular la media aritmética cuando tenemos los datos organizados por frecuencias (para el caso planteado en la introducción) el promedio o media aritmética de calificaciones se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{6 \times 5 + 7 \times 8 + 8 \times 4 + 9 \times 2 + 10 \times 1}{20} = \frac{146}{20} = 7.3$$

Podemos decir entonces el promedio de calificaciones del grupo en el último examen parcial de matemáticas es de **7.3**. Observa como en este caso la media aritmética no coincide con ninguno de los datos originales, de hecho el valor de la media aritmética tiene una cifra decimal aun cuando todos los datos originales fueron enteros.



## Mediana

La **mediana** ( $Me$ ) es el valor que, una vez ordenados todos los datos, se encuentra al centro (a la mitad) de la distribución. Si el número de datos es impar, coincidirá con uno de los datos; si el número de datos es par, hay que promediar los dos valores que se hallen en el centro de la distribución.

Como la mediana es el valor que se encuentra al centro de la distribución de datos una vez que éstos se ordenan, podemos decir que corresponde al valor que divide al conjunto de datos en dos partes iguales, de tal forma que la mitad de los valores son mayores que la mediana y la otra mitad es menor que la mediana. Una de las cualidades de la mediana es que los valores extremos no afectan el resultado.

Ejemplo 2:

Calcula la mediana del tiempo de espera para el conjunto de personas del caso presentado en el ejemplo 1.

Recapitulando el caso del ejemplo 1 teníamos los siguientes tiempos de espera en el banco

11, 13, 9, 10, 8, 12, 11, 14, 9, 13, 11, 8

Debemos entonces ordenarlos de menos a mayor, quedando así

8, 8, 9, 9, 10, **11, 11**, 11, 12, 13, 13, 14

El número de datos es 12 y al ser éste un número par, la mediana se calcula promediando los valores de los dos datos centrales (en este caso el 6to y 7mo dato), pero como ambos datos valen lo mismo su promedio es el valor de ambos datos, es decir, 11.

$$Me = \frac{11+11}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

Debes notar que no siempre el número total de datos es un número par, en estos casos la mediana corresponde al valor del único *dato central*. Más aun, no siempre que tenemos un número par de datos, los valores de los *datos centrales* son iguales, en estos casos, el promedio de los valores centrales es un valor distinto al de los datos centrales.

Cuando los datos se presentan en una tabla de frecuencias, como en el caso presentado en la introducción, debemos determinar la posición del valor central (cuando el total de valores es un número impar) o de los valores centrales (cuando el total de valores es un número par) y buscar en la tabla de frecuencias el o los valores correspondientes.

A la derecha hemos colocado nuevamente la tabla de frecuencias de las calificaciones del último examen parcial de matemáticas del grupo de secundaria. De acuerdo con el párrafo anterior, por tratarse de 20 datos (número par), el valor de la mediana correspondería al promedio de los valores de los datos ubicados en las posiciones 10 y 11. A estas dos posiciones corresponden calificaciones de 7 (ya que analizando la 2da columna, las calificaciones de 7 comienzan a partir del 6to dato y concluyen con el 13vo dato), de manera que

$$Me = \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Calificación	No. de alumnos
6	5
7	8
8	4
9	2
10	1

Para mostrar situaciones distintas al caso anterior te presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3:

En otro día, los tiempos de espera en minutos para que un grupo de 9 clientes fueran atendidos en la ventanilla del mismo banco que los ejemplos 1 y 2 fueron 11, 7, 10, 9, 10, 8, 7, 10, 9. Determina la mediana de este grupo de datos.

Para determinar el valor de la mediana ordenamos los datos de menos a mayor

7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11

En este caso se trata de 9 datos y al ser éste un número impar, a la mediana le corresponde el valor del 5to dato, pues es este el único dato central; entonces:

$$Me = 9$$

Ejemplo 4:

Siguiendo con el caso del tiempo de espera de clientes de un banco para ser atendidos en ventanilla, ahora se recolectaron los tiempos de espera de las 4 primeras personas que llegaban al banco cada día de lunes a viernes. Los resultados se muestran en la tabla. ¿Cuál es la mediana de este conjunto de datos?

Tiempo de espera	No. de clientes
12	4
15	6
17	8
20	2

Vemos que se trata de 20 clientes, por lo que la mediana será el promedio de los valores de los datos ubicados en las posiciones 10 y 11. En la tabla observamos que estos valores son 15 y 17, respectivamente, por lo que la media en este caso es:

$$Me = \frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Observa como la mediana puede no coincidir con alguno de los valores de la distribución.

#### Actividad 1



Como parte de un estudio para determinar el grado de nutrición de 12 alumnos de un grupo de primaria se ha tomando la estatura en centímetros de cada uno de ellos. Los resultados se presentan en la tabla de la derecha.

1. Determina, para este conjunto de datos, la moda, la media aritmética y la mediana y explica lo que indica cada una de éstas respecto del total de los datos.
2. Realiza comparaciones entre las tres medidas de tendencia central que calculaste y responde, ¿Cuál de las tres medidas describe mejor a la distribución de los datos? ¿Por qué?

Estaturas (cm)	Frecuencia absoluta
130	1
132	2
134	3
136	4
138	1
140	1

#### Cierre:



En este tema hemos presentado la forma en que podemos determinar la moda, la media aritmética y la mediana de un conjunto de datos, mejor conocidas como medidas de tendencia central ya que éstas están generalmente localizadas hacia el centro de una distribución. Así mismo mostramos su utilidad para resumir en unos cuantos valores la información que nos presenta un conjunto de datos ordenados y presentados en gráficas o tablas de frecuencias.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más...



[http://www.cete-sonora.gob.mx/recursos/isos/rec\\_mult\\_edu\\_sec1er\\_grado/matematicas/bloque\\_5/de\\_la\\_moda\\_lo\\_que\\_te\\_acomoda\\_medidas\\_de\\_tendencia\\_MA1\\_B5\\_5.6.1/ODA\\_MA1\\_B5\\_5.6.1.swf](http://www.cete-sonora.gob.mx/recursos/isos/rec_mult_edu_sec1er_grado/matematicas/bloque_5/de_la_moda_lo_que_te_acomoda_medidas_de_tendencia_MA1_B5_5.6.1/ODA_MA1_B5_5.6.1.swf)  
[http://odas.educarchile.cl/objetos\\_digitales/odas\\_matematicas/17\\_mediana\\_dispersion/LearningObject/content/io\\_6.swf?version=0.24](http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/17_mediana_dispersion/LearningObject/content/io_6.swf?version=0.24)

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

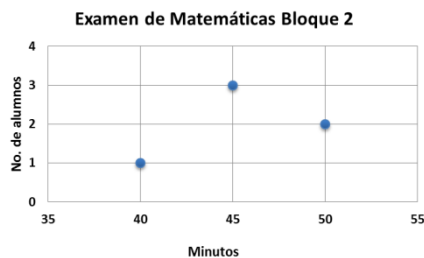
1. En una encuesta se recabó el número de hijos que tienen las familias que viven en una comunidad, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Número de hijos	Número de familias
1	5
2	10
3	10
4	10
5	5

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de tabla?

- A) La media, moda y mediana tienen valores distintos.
- B) La mediana es igual a la moda.
- C) La media aritmética es igual a la mediana.
- D) La moda es igual a la media aritmética.

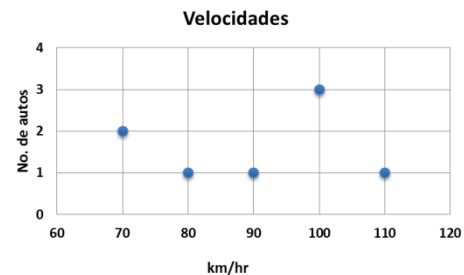
2. En la gráfica se muestra el tiempo en minutos empleado por un equipo de alumnos en la resolución del examen de matemáticas correspondiente al bloque 2.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de la gráfica?

- A) La media, moda y mediana tienen valores distintos.
- B) La mediana es igual a la media aritmética.
- C) La media aritmética es igual a la moda.
- D) La moda es igual a la mediana.

3. Con un radar de control de velocidad se midieron las velocidades en km/hr de 8 vehículos que pasaron en el último minuto del día de ayer por una de las avenidas principales de la ciudad de Guanajuato. Los resultados se presentan en la siguiente gráfica.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de gráfica?

- A) Existe más de una moda en este conjunto de datos.
- B) La media coincide con uno de los datos del conjunto.
- C) La mediana coincide con uno de los datos del conjunto.
- D) La media, moda y mediana tienen el mismo valor.

4. A continuación se presentan los valores ordenados de menor a mayor correspondientes al número de asistencias que tuvieron el último bimestre los alumnos de un grupo de secundaria a la clase de matemáticas.

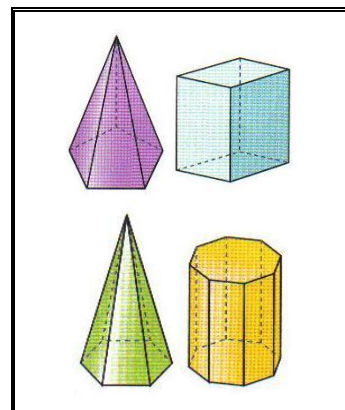
11, 12, 13, 15, 15, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 23, 24, 26

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de la lista?

- A) La media, moda y mediana tienen el mismo valor.
- B) La media coincide con uno de los datos del conjunto.
- C) La mediana coincide con uno de los datos del conjunto.
- D) Existe una sola moda en este conjunto de datos.

**TEMA 4. PRISMAS Y PIRÁMIDES****Bloque II****Eje temático:** Forma, espacio y medida**Tema:** Medida**Contenido:** Estimación y cálculo del volumen de prismas y pirámides rectos o de cualquier término implicado en las fórmulas**Aprendizaje esperado:**

Resuelve problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas rectos o pirámides, o cualquiera de sus elementos

**Introducción:**

Durante una clase, la maestra Lupita entregó a cada uno de sus alumnos un trozo de cartulina y un par de pentágonos de 5 cm de lado y área igual a  $43 \text{ cm}^2$ . Enseguida les pidió que cortaran de la cartulina las 5 caras laterales que hacían falta, de manera que pudieran construir un prisma pentagonal que tuviera un volumen de  $645 \text{ cm}^3$ . ¿Cuál es la medida de la altura del prisma que construyeron los alumnos y cuánto mide su área total?

Si observas la situación anterior, notarás que se está hablando del **volumen** y áreas de un cuerpo geométrico conocido como prisma. Para responder a las preguntas planteadas es necesario saber un poco sobre cuerpos geométricos. A continuación presentamos algunos conceptos importantes relacionados con los cuerpos geométricos conocidos como **prismas y pirámides**.

**Desarrollo:**

Frecuentemente nos encontramos en la vida cotidiana con distintos cuerpos geométricos que tienen una forma y características bien conocidas y definidas dentro del campo de la geometría. Así por ejemplo un dado tiene la forma de un cubo, una lata de refresco tiene la forma de un cilindro, un ladrillo tiene la forma de un prisma, una casa de campaña tiene la forma de pirámide, etc.

A continuación haremos un repaso breve sobre cuerpos geométricos y describiremos las características de dos de los grupos de cuerpos geométricos más importantes, los prismas y las pirámides.

**Los cuerpos geométricos**

Todo lo que percibimos son objetos de tres dimensiones; todos los seres y objetos de la naturaleza y todos los artefactos elaborados en las distintas culturas, son tridimensionales pues ocupan un lugar en el espacio físico.

Los **cuerpos geométricos** son objetos tridimensionales que tienen ciertas particularidades, ciertas formas más sencillas, más elementales, más regulares; por ejemplo, los que presentan caras externas constituidas por polígonos o círculos, o los que tienen una forma parcial o totalmente redonda. En este grupo quedan los objetos que tienen la apariencia de cajas, pirámides, prismas, cilindros, conos, esferas, etc.

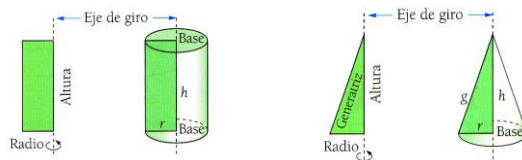


Los cuerpos geométricos también suelen ser denominados como **sólidos**. Esta denominación es válida, aunque no debe sugerir la idea de que tales cuerpos tienen que estar “llenos” interiormente, o tienen que ser “duros”; una caja de zapatos vacía y cerrada es también un ejemplo de cuerpo geométrico.

**Recuerda****Clasificación de los cuerpos geométricos**

Un criterio básico para clasificar los cuerpos geométricos se refiere a la *naturaleza de sus caras exteriores*. De esta forma tenemos:

- ❖ Los **cuerpos redondos** o **sólidos de revolución**, cuerpos geométricos formados por la revolución completa de una figura plana (llamada generatriz) alrededor de un eje de giro.

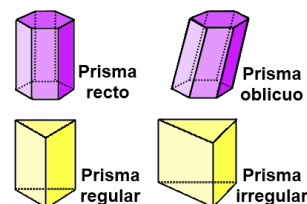


- ❖ Los **poliedros** (poliedro = polus [mucho] + hedra [cara] = muchas caras) son cuerpos geométricos limitados por un número finito de **polígonos**. Estos polígonos reciben el nombre de *caras* del poliedro, a la intersección de dos caras se le conoce como *arista* y al punto de intersección de más de dos caras como *vértice*.

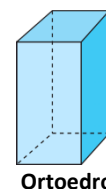
**Prismas**

Los **prismas** son poliedros que poseen dos caras congruentes (*bases*) ubicadas en planos paralelos y con sus aristas homólogas paralelas, de tal modo que las demás caras (*caras laterales*) son paralelogramos.

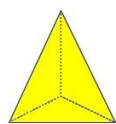
Cuando las aristas de esas caras laterales son perpendiculares a las bases, se habla de **prismas rectos**; en caso contrario, se trata de **prismas oblicuos**. Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos; la de los prismas oblicuos, romboides (o rombos). Se denomina **altura** del prisma a la distancia entre las dos bases. Un prisma se califica como **regular** cuando es recto y sus bases son polígonos regulares.



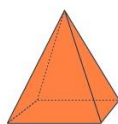
Los **paralelepípedos** (paralelepípedo = paralelos [paralelos] + epipedon [plano]) son prismas cuyas bases son paralelogramos; por consiguiente y como su nombre lo indica, poseen dos pares de caras laterales paralelas y congruentes. Las bases pueden ser rombos, romboides o rectángulos. En este último caso (que incluye también el de las bases cuadradas) el paralelepípedo recibe el nombre de **ortopedro** (ortopedro = orto [recto] + hedra [cara]), prisma que posee todas sus caras rectangulares; el ortopedro debe ser pues un paralelepípedo recto, no oblicuo. El cubo viene a ser un ortopedro regular, pero no es el único.

**Pirámides**

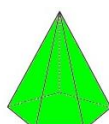
Las **pirámides** son poliedros con una sola base poligonal y caras laterales triangulares, que se unen en un punto denominado *vértice* de la pirámide. El número de lados del polígono de la base (o, lo que es lo mismo, el número de caras triangulares laterales) determina el tipo de pirámide: triangular (llamada tetraedro), cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.



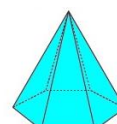
Triangular



Cuadrangular



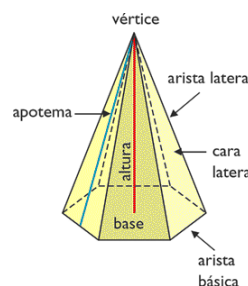
Pentagonal



Hexagonal

Una pirámide se califica como **regular** (o recta) si el polígono de la base lo es y los triángulos laterales son todos isósceles y congruentes. El **tetraedro** regular es un caso particular, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.

Se denomina **altura** de la pirámide a la distancia entre el vértice y la base, mientras que la **apotema** es la altura de cualquiera de los triángulos isósceles de las caras laterales.



### Superficies de los prismas y pirámides

Son diversas las superficies de los cuerpos geométricos, susceptibles de ser medidas.

Por **área** entendemos la medida de una superficie. Así, por ejemplo en los prismas y pirámides, hablamos del **área de las bases**, del **área lateral** y del **área total** cuando se trata de la suma de las dos anteriores.

En el caso de los prismas y pirámides cuando hablamos del área total nos estamos refiriendo al área de toda su superficie externa y, para no llenarte de fórmulas, diremos simplemente que en cada caso hay que evaluar la figura en cuestión, precisar los **polígonos que forman las bases**, y los **polígonos de las caras laterales**, tomar en cuenta los datos que se aportan, y hallar el área de la superficie solicitada empleando las fórmulas adecuadas.

Ejemplo 1:

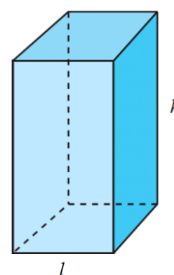
Calcular el área total de un **ortopedro de base cuadrada** de 8 cm de lado y 20 cm de alto.

Un ortopedro es un prisma recto que tiene como base un rectángulo o cuadrado, en este caso la base es un cuadrado de lado  $l = 8$  cm y sabemos que la altura de los rectángulos laterales es  $h = 20$  cm. Este ortopedro se ilustra en la figura de la derecha.

Para calcular el área total,  $A_t$ , debemos sumar el área de los polígonos que forman las bases,  $A_b$ , con el área de los polígonos de las caras laterales,  $A_l$ , es decir  $A_t = A_b + A_l$ .

Las bases están formadas por 2 cuadrados de lado  $l = 8$  cm, por lo que el área de las bases queda como

$$A_b = l \times l + l \times l = l^2 + l^2 = 2l^2 = 2(8 \text{ cm})^2 = 2(64 \text{ cm}^2) = 128 \text{ cm}^2$$



El área de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado

$$A_{\text{cuadrado}} = l \times l = l^2.$$

Recuerda



Las caras laterales están formadas por 4 rectángulos de lado  $l = 8$  cm y altura  $h = 20$  cm, por lo que el área de las caras laterales queda como

$$A_l = l \times h + l \times h + l \times h + l \times h = 4(l \times h) = 4(8 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}) = 4(160 \text{ cm}^2) = 640 \text{ cm}^2$$

*El área de un rectángulo se calcula multiplicando su largo por su alto*

$$A_{\text{rectángulo}} = l \times h.$$

**Recuerda**



Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales

$$A_t = A_b + A_l = 128 \text{ cm}^2 + 640 \text{ cm}^2 = 768 \text{ cm}^2$$

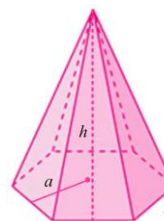
Ejemplo 2:

Calcular el área total de una **pirámide regular hexagonal** cuya base tiene 10 cm de lado y apotema de 8.66 cm, mientras que los triángulos laterales tienen una altura de 24.5 cm.

La pirámide regular hexagonal tiene como base un hexágono (que es un polígono regular de 6 lados) y, por consiguiente, son seis los triángulos isósceles que conforman sus caras laterales. Esta pirámide se ilustra en la figura de la derecha.

Para calcular el área total,  $A_t$ , debemos sumar el área de la base  $A_b$ , con el área de los polígonos de las caras laterales,  $A_l$ , es decir  $A_t = A_b + A_l$ .

La base está formada por un hexágono de lado  $l = 10 \text{ cm}$  y apotema  $a = 8.66 \text{ cm}$ , por lo que el área de las bases queda como



$$A_b = \frac{p \times a}{2} = \frac{6l \times a}{2} = \frac{6(10 \text{ cm})(8.66 \text{ cm})}{2} = \frac{519.6 \text{ cm}^2}{2} = 259.8 \text{ cm}^2$$

*El área de un polígono se calcula multiplicando su perímetro por su apotema y dividiendo entre dos*

$$A_{\text{polígono}} = \frac{p \times a}{2}.$$

**Recuerda**



Las caras laterales están formadas por 6 triángulos isósceles cuya base  $b$  es igual al lado del hexágono, es decir,  $b = l = 10 \text{ cm}$  y su altura es  $h = 24.5 \text{ cm}$ , por lo que el área de las caras laterales queda como

$$A_l = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} = 6 \left( \frac{b \times h}{2} \right) = 6 \left( \frac{10 \text{ cm} \times 24.5 \text{ cm}}{2} \right) = 6(122.5 \text{ cm}^2) = 735 \text{ cm}^2$$

*El área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo entre dos*

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \times h}{2}.$$

**Recuerda**



Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de la base y el área de las caras laterales

$$A_t = A_b + A_l = 259.8 \text{ cm}^2 + 768 \text{ cm}^2 = 1027.8 \text{ cm}^2$$

### Volumen de cuerpos geométricos

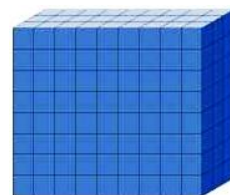
Medir el volumen de un cuerpo geométrico significa asignar un valor al **espacio ocupado por el mismo**. Como en el caso de cualquier medición, esto se consigue comparando ese espacio ocupado con el de una **unidad de volumen**.

La **unidad de volumen** es la de un cubo cuya *arista* mida 1 unidad ( $u$ ) de longitud (puede ser 1 cm, 1 m, etc.). Se dice que este **cubo unitario** tiene un volumen de 1 unidad cúbica ( $1 u^3$ ).



Si por ejemplo, se desea medir el **volumen de un paralelepípedo** hay que averiguar cuántos cubos unitarios contiene; esto se puede conseguir dividiéndolo adecuadamente, como el de la figura siguiente.

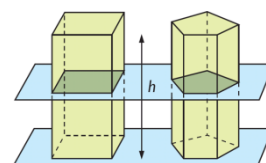
Luego, hay que contar ordenadamente el número de cubos unitarios. Para ello, procedemos a averiguar cuántos hay en un “piso”, por ejemplo, el de la base, que tiene nueve filas de tres cubos (o tres filas de nueve cubos), lo que da un total de 27 cubos unitarios. Ahora, sólo falta contar cuántos “pisos” tiene el paralelepípedo: ocho. Por consiguiente, el paralelepípedo de la figura contiene 216 cubos unitarios; su volumen es, pues,  $216 u^3$ .



De aquí podemos inferir que si las dimensiones de las aristas del paralelepípedo son  $a$ ,  $b$  y  $c$ , su volumen vendrá dado por  $V = a \times b \times c$ . Como un caso particular, el **volumen de un cubo de arista  $a$**  será  $V = a^3$ .

### Volumen de prismas

El procedimiento que hemos utilizado para calcular el volumen de un paralelepípedo se puede extender al caso de los prismas, ya que éstos comparten la siguiente propiedad: *cualquier plano que corte al cuerpo perpendicularmente a las aristas (en el prisma), da como intersección una figura congruente con la base respectiva*. Tal como se observa en la figura de la derecha.



Así, podemos imaginar que el espacio interior de los prismas puede ser *generado* por la figura de la base moviéndose en un “ascensor” perpendicular a dicha base a lo largo de la altura, y llenando ese espacio a cada paso con su propia figura.

De aquí surge la idea de considerar que

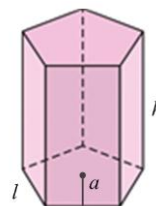
El **volumen de los prismas** es el resultado de multiplicar el área de la base por su altura del cuerpo. Así pues, el volumen viene dado por

$$V_{\text{prisma}} = \text{Área de la base} \times \text{altura}$$

Ejemplo 3:

Calcular el volumen de un **prisma recto pentagonal** de 18 cm de altura, cuyas bases miden 8 cm de lado y tienen una apotema de 5.5 cm.

El prisma recto pentagonal tiene como base un pentágono (que es un polígono regular de 5 lados) y, por consiguiente, son cinco los rectángulos que conforman sus caras laterales. Este prisma se ilustra en la figura de la derecha.



Para calcular el volumen del prisma debemos multiplicar su altura por el área de su base mediante la siguiente expresión

$$V_{\text{prisma}} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = \frac{p \times a}{2} \times h = \frac{5l \times a}{2} \times h$$

Si sustituimos  $l = 8 \text{ cm}$ ,  $a = 5.5 \text{ cm}$  y  $h = 18 \text{ cm}$  en la formula anterior tenemos que el volumen del prisma es

$$V_{\text{prisma}} = \frac{5l \times a}{2} \times h = \frac{5(8 \text{ cm}) \times (5.5 \text{ cm})}{2} \times 18 \text{ cm} = 110 \text{ cm}^2 \times 18 \text{ cm} = 1980 \text{ cm}^3$$



## Volumen de pirámides

Para que puedas comprobar tú mismo lo que aquí vamos a establecer en relación al volumen de las pirámides realiza los que a continuación se indica.

### Actividad 1



1. Recorta los patrones del prisma pentagonal y la pirámide pentagonal que aparecen en el Anexo 1 al final del cuadernillo. Nota que en ambos cuerpos geométricos el área de la base y la altura son iguales.
2. Para cada uno de los cuerpos geométricos que recortaste, realiza los dobleces de sus caras laterales y únelas a través de la *pestaña* que sobresale en una de las aristas de uno de los extremos (puedes untar pegamento en la pestaña para unir las caras laterales).
3. Para la pirámide no unas la base a las caras laterales y para el prisma une solamente una de las bases a las caras laterales.
4. Llena la pirámide de arena o de azúcar (o de otro material diminuto) y vacíala dentro del prisma. Repite el paso anterior dos veces más (para un total de tres veces).

### ¿Qué puedes concluir después de haber realizado el experimento anterior?

Con la práctica anterior debiste notar que el contenido (volumen) de tres pirámides es equivalente al contenido (volumen) del prisma. En términos geométricos esto quiere decir que

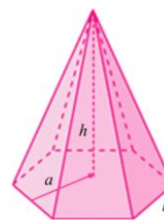
El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura de la pirámide considerada. Es decir,

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

Ejemplo 4:

Calcular el volumen de una **pirámide regular hexagonal** de 25 cm de altura y cuya base tiene 10 cm de lado y apotema de 8.6 cm.

La pirámide regular hexagonal tiene como base un hexágono (como la mostrada en la figura de la derecha) y, para calcular su volumen, debemos multiplicar el área de su base por su altura y dividir entre tres, esto lo hacemos mediante la expresión



$$V_{\text{pirámide}} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\frac{p \times a}{2} \times h}{3} = \frac{\frac{6l \times a}{2} \times h}{3} = \frac{6l \times a \times h}{6} = l \times a \times h$$

Si sustituimos  $l = 10$  cm,  $a = 8.66$  cm y  $h = 25$  cm en la fórmula anterior tenemos que el volumen del prisma es

$$V_{\text{pirámide}} = l \times a \times h = 10 \text{ cm} \times 8.66 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} = 2165 \text{ cm}^3$$

### Actividad 2



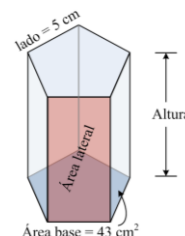
Realiza una figura y calcula el área total y el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma regular triangular con una altura de 10 cm y cuya base tiene 6 cm de lado y 5.2 cm de alto.
2. Prisma hexagonal con una altura de 10 cm y cuya base tiene 6 cm de lado y 5.2 cm de apotema.
3. Pirámide recta cuadrangular de 10 cm de alto, cuya base tiene 7 cm de lado y la altura de sus triángulos laterales es de 10.6 cm.

Ahora reconsideremos la situación planteada en la introducción:

*Durante una clase, la maestra Lupita entregó a cada uno de sus alumnos un trozo de cartulina y un par de pentágonos de 5 cm de lado y área igual a  $43 \text{ cm}^2$ . Enseguida les pidió que cortaran de la cartulina las 5 caras laterales que hacían falta, de manera que pudieran construir un prisma pentagonal que tuviera un volumen de  $645 \text{ cm}^3$ . ¿Cuál es la medida de la altura del prisma que construyeron los alumnos y cuánto mide su área total?*

Si analizas la información que nos dan, notarás que se trata de un prisma pentagonal (como el de la figura de la derecha) del cual tenemos como datos el área de la base  $A_{\text{base}} = 43 \text{ cm}^2$ , la longitud del lado de cada uno de los rectángulos que conforman las caras laterales  $l = 5 \text{ cm}$  y su volumen  $V_{\text{prisma}} = 645 \text{ cm}^3$ . Lo que nos piden calcular con estos datos es la altura  $h$  del prisma y su área total. Para determinar la altura, la despejamos de la fórmula  $V_{\text{prisma}} = \text{Área de la base} \times \text{altura}$  y sustituimos los datos



$$V_{\text{prisma}} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = A_{\text{base}} \times h$$

$$h = \frac{V_{\text{prisma}}}{A_{\text{base}}} = \frac{645 \text{ cm}^3}{43 \text{ cm}^2} = 15 \text{ cm}$$

Por otra parte, el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales  $A_t = A_b + A_l$  y en este caso ya tenemos el valor del área de una de las bases, que es  $43 \text{ cm}^2$ , pero como son dos las bases entonces el área de ambas bases es

$$A_b = 2 \times 43 \text{ cm}^2 = 86 \text{ cm}^2$$

Las caras laterales están formadas por 5 rectángulos de lado  $l = 5 \text{ cm}$  y altura  $h = 15 \text{ cm}$ , por lo que el área de las caras laterales queda

$$A_l = l \times h + l \times h + l \times h + l \times h + l \times h = 5(l \times h) = 5(5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}) = 5(75 \text{ cm}^2) = 375 \text{ cm}^2$$

Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales

$$A_t = A_b + A_l = 86 \text{ cm}^2 + 375 \text{ cm}^2 = 461 \text{ cm}^2$$

### Cierre:



En este tema hemos hecho un repaso breve sobre cuerpos geométricos, presentado algunos conceptos importantes y describiendo las características de dos de los grupos de cuerpos geométricos más importantes, **los prismas y las pirámides**. Notaste las diferencias existentes entre los prismas y las pirámides y aprendiste a calcular tanto su área total, como su volumen a partir del conocimiento de algunos de sus elementos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más... [http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b02\\_t03\\_s](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t03_s01_descartes/TS_1_index.html)



[01\\_descartes/TS\\_1\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t03_s01_descartes/TS_1_index.html)

[http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b02\\_t04\\_s](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t04_s01_descartes/TS_2_index.html)

[01\\_descartes/TS\\_2\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t04_s01_descartes/TS_2_index.html)

[http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b02\\_t05\\_s01\\_descartes/index.html](http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t05_s01_descartes/index.html)

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Un artesano desea elaborar velas con forma de pirámide hexagonal que tengan una base de  $210 \text{ cm}^2$ . ¿Cuántos centímetros de altura debe tener el molde para hacer las velas, si el artesano debe gastar sólo  $3150 \text{ cm}^3$  de parafina por cada vela?

- A) 10.5
- B) 15.0
- C) 21.0
- D) 31.5

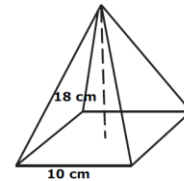
2. Laura va a envolver un regalo con una caja que tiene forma de ortoedro de 25 cm de altura y cuyas bases son cuadrados de 15 cm de lado. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de papel necesita Laura para envolver su regalo?

- A) 850
- B) 1950
- C) 2750
- D) 5625

3. Miguel compró un jugo en un empaque en forma de tetraedro y observó que decía que su contenido era igual a 325 ml (ó  $325 \text{ cm}^3$ ). Con una regla Miguel midió las aristas del tetraedro, pero no pudo medir su altura interior. Si con sus medidas Miguel calculó que la base tiene  $80 \text{ cm}^2$  de área, ¿cuál es la altura interior del tetraedro en centímetros?

- A) 4.1
- B) 8.0
- C) 12.2
- D) 13.0

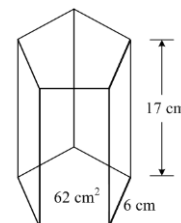
4. Francisco hizo una maqueta de una pirámide con los siguientes datos:



¿De cuantos  $\text{cm}^3$  es el volumen de la maqueta de francisco?

- A) 240
- B) 600
- C) 720
- D) 1800

5. De tarea Julia debe elaborar con cartulina un prisma como el que se muestra:



¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de cartulina necesitará Julia como mínimo para hacer su tarea?

- A) 226
- B) 510
- C) 572
- D) 634

**TEMA 5. PROPORCIONALIDAD INVERSA****Bloque II****Eje temático:** Manejo de la información**Tema:** Proporcionalidad y funciones**Contenido:** Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.**Aprendizaje esperado:**

Resuelve situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

**Introducción:**

En la final estatal de un concurso de ortografía quedaron solamente Marcos y Andrea. El premio de \$6,000 será compartido y se repartirá de manera que quién tenga más errores obtendrá menos dinero. Si Andrea cometió 12 errores y Marcos 18 errores, ¿cuánto dinero ganó finalmente Andrea?

Para poder responder al cuestionamiento de la situación anterior es preciso notar que cuanto **mayor** es el número de errores que comete alguno de los finalistas del concurso, **menor** será la cantidad de dinero que reciba como premio. Existen muchas situaciones cotidianas que relacionan dos cantidades de manera que a medida que una aumenta la otra disminuye. Siempre que estamos ante este tipo de situaciones decimos que las cantidades varían de manera *inversamente proporcional* o que existe una relación de **proporcionalidad inversa** entre las dos cantidades.

**Desarrollo:**

A continuación te presentaremos algunos conceptos y procedimientos que podemos emplear cuando tratamos de resolver problemas que presentan dos tipos de magnitudes o cantidades entre las cuales existe una relación de **proporcionalidad inversa**. Para ello vamos a iniciar con el planteamiento de algunas situaciones de este tipo.

Considera el tipo de relación que existe entre las cantidades o magnitudes involucradas en las siguientes situaciones:

- ❖ La velocidad de un vehículo y la duración del viaje al recorrer una distancia fija.
- ❖ El número de obreros y el tiempo para terminar una determinada obra.
- ❖ El número de personas en una fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una.

Observa que en todas las situaciones anteriores, a medida que aumenta la primera cantidad, la lógica nos indica que la segunda disminuirá. Así por ejemplo, supongamos que en la primera situación varios vehículos recorren una distancia fija de 120 km y que cada vehículo viaja a una velocidad constante conforme a la tabla de la derecha.

Evidentemente, las magnitudes de velocidad y tiempo no están en una relación de proporcionalidad directa; por el contrario, al aumentar los valores de una, disminuyen los de la otra, y viceversa.

Velocidad (km/h)	Tiempo (minutos)
75	96
80	90
100	72
120	60

Una relación de **proporcionalidad directa** entre dos magnitudes es aquella en la que, si los valores de una de las magnitudes se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número. Por ejemplo:

- ❖ El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar.
- ❖ El tiempo transcurrido y la distancia recorrida a una velocidad constante.

**Recuerda**

En las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la **razón** entre pares de valores correspondientes, mientras que en las situaciones como las del ejemplo, lo que se mantiene constante es el **producto** entre pares de valores correspondientes:  $75 \times 96 = 80 \times 90 = 100 \times 72 = 120 \times 60 = 7200$ .

Una razón es un cociente entre dos cantidades y el valor de ese cociente se llama valor de la razón. La razón de  $a$  es  $b$  puede expresarse como  $\frac{a}{b}$ .

Recuerda



En toda situación en que se relacionan dos magnitudes, si cualquier par de valores correspondientes  $a$  y  $b$ ;  $c$  y  $d$  (donde  $a$  y  $c$  son de la primera magnitud, y  $b$  y  $d$  de la segunda) verifican la igualdad:  $a \times b = c \times d$ , entonces decimos que **las magnitudes se hallan en una relación de proporcionalidad inversa**, o que **son inversamente proporcionales**. Si en general denotamos como  $x$  e  $y$  ambas magnitudes, y como  $k$  el producto constante de cada par de valores correspondientes, la relación entre ambas magnitudes puede representarse mediante la expresión algebraica

$$xy = k$$

donde  $k$  es conocida como la **constante de proporcionalidad inversa**.

Para clarificar lo anterior, consideremos la situación de las velocidades y tiempos de recorrido de la página anterior.

Sean  $a = 75$ ,  $b = 96$ ,  $c = 80$  y  $d = 90$ , donde  $a$  y  $c$  son velocidades en km/hr y  $b$  y  $d$  tiempos en minutos, se verifica que  $a \times b = c \times d = 7200$ . Si multiplicamos cualquier par de valores correspondientes al mismo reglón de la tabla se obtiene siempre la misma cantidad, 7200, que es el valor de la **constante de proporcionalidad inversa** para esta situación. Esto lo podemos expresar algebraicamente como

$$xy = 7200$$

Velocidad (km/h)	Tiempo (minutos)
75	96
80	90
100	72
120	60
$x$	$y$

### La regla de tres inversa

Existe una técnica para resolver los casos en los que, en una relación de proporcionalidad inversa, de los cuatro valores correspondientes a dos pares de magnitudes implicadas, se conocen tres y se desconoce uno.

La **regla de tres inversa** es la operación de encontrar una cuarta magnitud en una relación de proporcionalidad inversa sabiendo el valor de las otras tres magnitudes implicadas. Si conocemos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; y desconocemos el valor de  $d$ , en donde  $a$  y  $c$  son de la primera magnitud, y  $b$  y  $d$  de la segunda, podemos establecer la siguiente relación:

$$a \rightarrow b$$

$$c \rightarrow d$$

De donde el valor de  $d$  se obtiene multiplicando el par de magnitudes del primer renglón e igualándolo al producto del par de magnitudes del segundo renglón  $a \times b = c \times d$  (ya que ambos productos son iguales a la constante de proporcionalidad inversa). Finalmente despejamos  $d$  de la igualdad planteada de modo que

$$\text{sea } a \times b = c \times d, \text{ entonces, } d = \frac{a \times b}{c}.$$

Del producto  $a \times b = c \times d$ , derivamos la proporción  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ . Si se tratara de una situación de proporcionalidad directa, la proporción pertinente sería  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ó, lo que es lo mismo,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ . Observa como la proporción  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$  se forma invirtiendo una de las razones de una proporción directa  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ( $\frac{b}{d}$  pasa a ser  $\frac{d}{b}$ ). De aquí el nombre

de **proporcionalidad inversa** que se aplica a las magnitudes que se relacionan de manera que su producto (y no su cociente) permanece constante.

Ejemplo 1:

Para ir de la ciudad de León a la ciudad de México, una persona duró 4 horas viajando en su automóvil a una velocidad promedio de 110 kilómetros por hora. Si otra persona que viajó en autobús duró  $5\frac{1}{2}$  horas en llegar a la Ciudad de México desde León, ¿a qué velocidad promedio viajó el autobús?

Podemos establecer la siguiente relación con las tres magnitudes que nos dan y la que nos piden determinar

$$4 \text{ hr} \rightarrow 110 \text{ km/hr}$$

$$5\frac{1}{2} \text{ hr} \rightarrow ?$$

De manera que si  $a = 4$ ,  $b = 110$ ,  $c = 5\frac{1}{2}$  y  $d = ?$ , al aplicar la regla de tres inversa tendríamos que  $a \times b = c \times d$ , y de aquí que

$$d = \frac{a \times b}{c} = \frac{(4)(110)}{5\frac{1}{2}} = \frac{440}{5.5} = 80$$

De lo anterior concluimos que la velocidad del autobús fue de 80 km/h. Nota que la constante de proporcionalidad inversa en esta situación es igual a 440 y la podemos expresar algebraicamente como

$$xy = 440$$

¿Para qué nos sirve la expresión anterior?

Una vez que determinamos la expresión para la constante de proporcionalidad de una situación específica, podemos calcular, dado algún valor de una de las dos magnitudes involucradas, el valor corresponde a la otra magnitud. Si para la situación anterior asignamos a  $x$  los valores del tiempo que dura el viaje y a  $y$  asignamos las velocidades promedio, podemos calcular, por ejemplo

a) el tiempo de viaje de un automóvil que hizo el recorrido a una velocidad promedio de 105 km/hr, o

$$\text{sea } xy = 440 \text{ con } y = 105, \text{ entonces } x = \frac{440}{y} = \frac{440}{105} = 4.19 \text{ hr}$$

b) la velocidad promedio a la que viajó un automóvil si éste hizo  $4\frac{1}{4}$  hr des recorrido

$$\text{sea } xy = 440 \text{ con } x = 4.25, \text{ entonces } y = \frac{440}{x} = \frac{440}{4.25} = 103.53 \text{ km/hr}$$

### Actividad 1



En un laboratorio se realiza un experimento para comprobar la relación que hay entre la presión de un gas y el volumen que ocupa (suponiendo que la temperatura es constante). En la siguiente tabla se registraron los datos obtenidos en el experimento.

$x = (\text{Presión del gas en atmósferas})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y = (\text{Volumen en dm}^3)$	12	6	4	3	2.4	2

Con la información proporcionada, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la expresión algebraica asociada a este problema?
2. ¿Qué volumen ocupará el gas cuando la presión sea igual a 0.9 atmósferas?
3. ¿A qué presión estará el gas cuando éste ocupe un volumen de  $1.5 \text{ dm}^3$ ?

Ahora reconsideremos la situación planteada en la introducción:

*En la final estatal de un concurso de ortografía quedaron solamente Marcos y Andrea. El premio de \$6,000 será compartido y se repartirá de manera que quién tenga más errores obtendrá menos dinero. Si Andrea cometió 12 errores y Marcos 18 errores, ¿cuánto dinero ganó finalmente Andrea?*

Considerando que el premio es de \$6000 y si definimos a  $y$  como la cantidad de dinero que gana Andrea, la cantidad de dinero que gana Marcos sería  $6000 - y$ . Podemos establecer entonces la siguiente relación

$$\begin{aligned} 12 \text{ errores} &\rightarrow y \\ 18 \text{ errores} &\rightarrow 6000 - y \end{aligned}$$

Al aplicar la regla de tres inversa obtenemos la siguiente expresión

$$12y = 18(6000 - y)$$

Si realizamos las operaciones indicadas y despejamos  $x$ , llegamos a

$$\begin{aligned} 12y &= 108000 - 18y \\ 30y &= 108000 \\ y &= \frac{108000}{30} \\ y &= 3600 \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que Andrea ganó \$3600 de los \$6000 que había en total en el premio.

¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa de esta situación?

Siempre que queramos saber el valor de la constante de proporcionalidad inversa debemos multiplicar un par de valores correspondientes a las magnitudes involucradas, en este caso tenemos que si  $x = 12$  y  $y = 3600$ , entonces

$$k = xy = (12)(3600) = 43200$$

### Cierre:



En este tema hemos presentado algunos conceptos y procedimientos que podemos emplear cuando tratamos de resolver problemas que presentan dos tipos de magnitudes o cantidades entre las cuales existe una relación de **proporcionalidad inversa**. Debes de tener presente que en este tipo de situaciones lo que se mantiene constante es el **producto** entre pares de valores correspondientes a las dos cantidades involucradas y que siempre se podrán representar mediante una expresión del tipo

$$xy = k.$$

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

### Para saber más...



[http://www.desarrollomultimedia.cl/digitales\\_html/oda\\_html/tipoEjercitacion/11/paso3.swf](http://www.desarrollomultimedia.cl/digitales_html/oda_html/tipoEjercitacion/11/paso3.swf)

<http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/09/4.swf>

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Si 4 personas tardan 8 días en aplanar un terreno y si todas las personas trabajan de manera proporcional. ¿Cuántos días tardarían en aplanar el mismo terreno 8 personas?

- A) 4
- B) 8
- C) 12
- D) 16

2. Ángeles tiene dinero suficiente para comprar 20 paquetes de dulces de \$40, cada uno. Si los paquetes de dulces suben a \$50. ¿Cuántos paquetes de dulces podrá comprar con el mismo dinero?

- A) 10
- B) 15
- C) 16
- D) 18

3. En una carrera atlética se van a repartir 120 puntos, el que haga menos tiempo obtienen más puntos: es decir, hay una relación inversamente proporcional. Si Martha hizo 6 minutos y María 4, ¿cuántos puntos hizo María?

- A) 40
- B) 48
- C) 60
- D) 72

4. La siguiente tabla relaciona la velocidad media en km/hr de un camión de carga y el tiempo en horas que tarda en cubrir la distancia que separa dos ciudades.

Velocidad km/hr	Tiempo horas
50	4
100	2
25	8

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

- A) 25
- B) 50
- C) 100
- D) 200

5. La siguiente tabla relaciona el número de personas con el número de días que se tardarían en hacer un trabajo.

Números de personas	Número de días
5	$y$
4	5
2	$x$

Si existe una relación de proporcionalidad inversa entre ambos grupos de cantidades, ¿cuál de las siguientes opciones contiene los valores correctos de  $x$  y  $y$ ?

- A)  $x=8$ ,  $y=6$
- B)  $x=8$ ,  $y=4$
- C)  $x=10$ ,  $y=6$
- D)  $x=10$ ,  $y=4$



## TEMA 6. SITUACIONES ALEATORIAS

## Bloque II

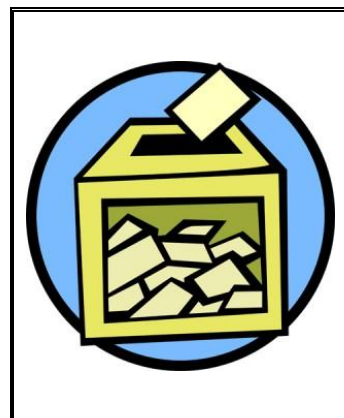
Eje temático: Manejo de la información

Tema: Nociones de probabilidad

**Contenido:** Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de ésta con la probabilidad teórica.

**Aprendizaje esperado:**

Resuelve problemas que impliquen utilizar la simulación en situaciones probabilísticas.

**Introducción:**

Andrea ganó el concurso de conocimientos en su escuela, por ello la directora ha decidido obsequiarle un libro. La directora depositó en una caja papelitos con los títulos de 6 libros de español, 4 libros de matemáticas y 2 libros de geografía, para que Andrea extraiga uno y se lleve a su casa el libro correspondiente. ¿Cuál es la probabilidad de que Andrea se gane un libro de matemáticas o español?

En este tema aprenderás a resolver situaciones de la vida cotidiana en donde interviene el **azar**, calculando la probabilidad de que suceda un evento derivado de una situación de **simulación**.

**Desarrollo:**

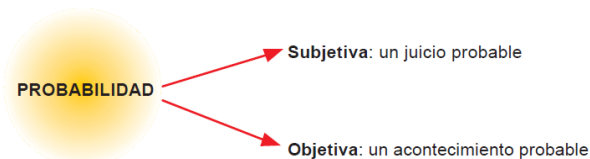
A continuación te presentamos la manera en que se resuelven algunos problemas en donde interviene el azar, para lo cual repasaremos algunos conceptos de **probabilidad**. Describiremos algunas simulaciones de situaciones aleatorias y mostraremos la forma en que se puede calcular la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos deseados y la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos distintos.

**Probabilidad**

En la Antigüedad se denominaba *probable* a lo que según las apariencias puede ser declarado verdadero o cierto. Por lo que la probabilidad posee grados según su acercamiento o alejamiento de la certidumbre (certeza).

La idea de probabilidad y azar dieron origen al cálculo de probabilidades como disciplina de carácter matemático. Esto permitió dar un valor numérico a la probabilidad de ocurrencia o no ocurrencia de un acontecimiento o resultado (probabilidad objetiva), el cual se mide por la relación entre el número de casos favorables para un acontecimiento cualquiera (evento) y el número posible de acontecimientos, admitiendo que todos los casos son igualmente probables.

Si existe poca o ninguna experiencia anterior o información sobre la cual nos basemos para establecer la probabilidad de un evento, podemos llegar a ella en forma subjetiva. Esto significa que un individuo evalúa las opiniones disponibles y después estima o asigna la probabilidad. Esta probabilidad se conoce como probabilidad subjetiva.



La **Probabilidad**, es la rama de las matemáticas que mide la frecuencia con la que se obtiene un conjunto de resultados al realizar un *experimento aleatorio*, del cual se conocen todos los resultados posibles bajo condiciones estables. La Probabilidad toma valores entre 0 y 1, entre mayor sea el número en ese intervalo es más probable de que el evento ocurra.

La **probabilidad frecuencial** es un valor que se obtiene de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro cierto comportamiento. Es importante saber interpretar bien los resultados que se obtienen, pues no se tiene un comportamiento definitivo.

Los fenómenos o **experimentos aleatorios** son los que dependen de la “suerte” o “azar”, es decir son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de estos va a ser observado en la realización del experimento a pesar de haberlo realizado en similares condiciones. A la colección de resultados que se obtiene en los experimentos aleatorios se le llama **espacio muestral**.

**Recuerda**



Si designamos con la letra  $A$  a un evento, la probabilidad frecuencial de ese evento se denota por  $P(A)$  y se calcula dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre el evento}}{\text{número de veces que se realiza el experimento}}$$

También podemos obtener un valor sobre la probabilidad de un evento  $A$  sin necesidad de realizar experimentos como en la probabilidad frecuencial, se trata de la **probabilidad clásica** y ésta se basa en la suposición de que los resultados de un experimento son igualmente posibles. Si designamos a  $P(e)$  como el valor de la probabilidad de que ocurra un evento, entonces tenemos que

$$P(e) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}}$$

Cuando se habla de probabilidad clásica se acostumbra solamente usar el término probabilidad.

### Simulación de situaciones aleatorias

Cuando hablamos de **simulación** nos referimos a que, para un problema de tipo aleatorio real (de la vida cotidiana), se diseña otra situación aleatoria en la cual los eventos tienen la misma probabilidad clásica de ocurrir que los del problema original. Se tiene la ventaja de que en la simulación se pueden observar los resultados para luego calcular los valores de la probabilidad frecuencial y utilizar estos valores para obtener información sobre el problema original.

Para poder diseñar una simulación se puede utilizar algún tipo de material u objeto manipulable, por ejemplo dados, monedas, urnas, tablas de números aleatorios, etcétera.

Lo que aquí te vamos a presentar es la forma en que se calculan las probabilidades de eventos a partir de una situación de simulación sin desarrollarla, apoyándonos de la probabilidad clásica. Para ello, considera la siguiente situación.

*Para el próximo día del niño en una escuela se van a obsequiar tres tipos distintos de regalos a todos los alumnos de una escuela. Los regalos son un tangram, un geoplano y un cubo de Rubik y se dará prioridad a que los alumnos de cada grupo con las mejores calificaciones seleccionen aleatoriamente su regalo.*

*Pepe, que es el mejor de su clase, sabe que se cuenta con el mismo número de unidades de cada uno de estos regalos para su grupo, que en total es de 33 alumnos y como a él le interesa ganarse un geoplano o un tangram decide realizar una simulación de lo que posiblemente suceda cuando le toque seleccionar su regalo.*

Lo que Pepe hizo fue meter en una caja 33 papelitos con el nombre de cada uno de los tres regalos, 11 decían “tangram”, 11 decía “geoplano” y 11 decían “cubo de Rubik”.

Reprodujo 100 veces el experimento de sacar al azar un papelito y registró las frecuencias (con una línea inclinada por cada vez) de cada tipo de regalo. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Evento	Descripción	Frecuencia
T	Sacar un papelito de Tangram	//// // = 32 ////
G	Sacar un papelito de Geoplano	//// //// = 34 ////
C	Sacar un papelito de Cubo de Rubik	//// //// = 34 ////

¿Cómo puede con estos resultados Pepe determinar la probabilidad de seleccionar un tangram o un geoplano?

La *probabilidad frecuencial* de cada uno de los eventos A y B es:

$$P(T) = \frac{\text{veces que ocurre el evento } T}{\text{veces que se realiza el experimento}} = \frac{32}{100}$$

$$P(G) = \frac{\text{veces que ocurre el evento G}}{\text{veces que se realiza el experimento}} = \frac{34}{100}$$

La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B se obtiene de sumar las probabilidades individuales de cada evento, de manera que

$$P(T)+P(G)=\frac{32}{100}+\frac{34}{100}=\frac{66}{100}=0.66$$

Por lo cual concluimos que Pepe tiene una probabilidad de 0.66 de seleccionar un tangram o un geoplano.

## Probabilidad clásica y la simulación

Por medio de la *probabilidad clásica* podemos determinar esta probabilidad, sin necesidad de repetir 60 veces el experimento que hizo Pepe, de la siguiente manera:

Determinamos la razón del número de papelitos de cada tipo de regalo con el número de papelitos que hay en total como  $\frac{11}{33} = \frac{1}{3}$ . Este valor corresponde a la *probabilidad clásica* de que Pepe seleccione algún tipo específico de regalo, es decir

$$P(T)=\frac{1}{3} \qquad P(G)=\frac{1}{3} \qquad P(C)=\frac{1}{3}$$

De manera que si queremos saber la probabilidad del evento A o el evento B sumamos

$$P(T)+P(G)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.667$$

Lo cual es un resultado muy similar al que obtuvimos anteriormente. Nota que, con saber que cada evento tiene la misma probabilidad, podemos generar otra situación de simulación más sencilla que nos represente la situación real, por ejemplo, meter en una bolsa tres pelotas de distintos colores y extraer una bola.

¿Qué sucede si en lugar de ser el mismo número de regalos de cada tipo se tuvieran, por ejemplo, 11 tangram, 13 geoplanos y 9 cubos de Rubik?

En este caso, la probabilidad de cada uno de los eventos sería distinta de manera que

$$P(T) = \frac{11}{33} \quad P(G) = \frac{13}{33} \quad P(C) = \frac{9}{33}$$

Entonces, si queremos saber la probabilidad del evento A o el evento B sumamos

$$P(T) + P(G) = \frac{11}{33} + \frac{13}{33} = \frac{24}{33} = 0.723$$

Por lo cual concluimos que Pepe tendría una probabilidad de 0.723 de seleccionar un tangram o un geoplano. En general podemos decir que

En una situación de simulación, la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos es igual a la **suma de las probabilidades de cada uno de los eventos**.

### Probabilidad en dos eventos simultáneos

Continuando con una situación similar a la planteada pensemos en que en lugar de obsequiar un regalo a los niños se les obsequiarán 2 regalos y que sigue habiendo las mismas unidades de los 3 tipos distintos de regalos. De esta manera, para el salón de pepe se tendría 66 regalos en total, 22 tangram, 22 geoplanos y 22 cubos de Rubik.

Para repartir los regalos, la maestra metió, en dos bolsas (bolsa 1 = B1 y bolsa 2 = B2), 3 pelotas de distinto color y solicita a Pepe que extraiga simultáneamente una bola de cada bolsa para determinar cuáles serían sus regalos.

Si la asignación de los colores de las pelotas es

T = Pelota verde = Tangram

G = Pelota azul = Geoplano

C = Pelota Roja = Cubo de Rubik

¿Cuál es la probabilidad de que Pepe saque de la primera bolsa un tangram y de la segunda bolsa un geoplano?

Para representar esta situación hacemos la siguiente tabla:

	B1	B2		B1	B2		B1	B2
1	T	T	2	T	G	3	T	C
4	G	T	5	G	G	6	G	C
7	C	T	8	C	G	9	C	C

En esta tabla se muestran las posibles combinaciones que existen al extraer, de cada bolsa, una pelota de cualquiera de los tres distintos colores. Observa entonces que, la combinación 2, es la que corresponde a extraer un tangram de la bolsa 1 y un geoplano de la bolsa 2. De lo anterior vemos que tenemos 1 de 9 combinaciones que coinciden con el evento deseado, por lo que decimos que  $P(TG) = \frac{1}{9}$

Sabemos que  $P(T) = \frac{1}{3}$  y  $P(G) = \frac{1}{3}$  y hemos determinado que  $P(TG) = \frac{1}{9}$ , podemos concluir que entonces que

$$P(TG) = P(T) \times P(G) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

En general podemos decir que

En una situación de simulación, la probabilidad de que ocurran dos eventos simultáneos es igual al **producto de las probabilidades de cada uno de los eventos**.

### Actividad 1



Responde lo que se indica en cada una de las siguientes situaciones.

1. Sobre una mesa se encuentra un frasco con doce caramelos negros, ocho rojos, diez amarillos y cinco verdes. Tomas un caramelo sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que saques un caramelo de color negro o amarillo?
2. Si se lanza un dado en forma de dodecaedro regular (con 12 caras iguales en forma de pentágono) cuyas caras están numeradas con del 1 al 12, ¿qué probabilidad hay de que salga un número que sea múltiplo de 5 o múltiplo de 3 (incluyéndolos)?
3. Se lanzan un dado de seis caras y una moneda simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 4 en el dado y cara en la moneda?

Antes de finalizar el tema, daremos respuesta a la situación planteada en la introducción:

*Andrea ganó el concurso de conocimientos en su escuela, por ello la directora ha decidido obsequiarle un libro. La directora depositó en una caja papelititos con los títulos de 6 libros de español, 4 libros de matemáticas y 2 libros de geografía, para que Andrea extraiga uno y se lleve a su casa el libro correspondiente. ¿Cuál es la probabilidad de que Andrea se gane un libro de matemáticas o español?*

Sea  $P(E) = \frac{6}{12}$  la probabilidad de sacar un libro de español,  $P(M) = \frac{4}{12}$  la probabilidad de sacar un libro de matemáticas y  $P(G) = \frac{2}{12}$  la probabilidad de sacar un libro de geografía, tenemos que

$$P(E) + P(M) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12} = 0.83$$

### Cierre:



En este tema aprendiste a resolver situaciones de la vida cotidiana en donde interviene el **azar**, calculando la probabilidad de que suceda un evento derivado de una situación de **simulación**. Para ello te presentamos algunos conceptos de **probabilidad** y describimos algunas simulaciones de situaciones aleatorias, mostrando la forma en que se puede calcular la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos deseados y la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos distintos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

### Para saber más...



<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

[http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3\\_tercero/3\\_Matematicas/INTERACTIVOS/3m\\_b02\\_t06\\_s01\\_descartes/index.html](http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b02_t06_s01_descartes/index.html)

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 bolas blancas y 6 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca?

- A)  $\frac{1}{15}$
- B)  $\frac{1}{9}$
- C)  $\frac{3}{5}$
- D)  $\frac{4}{5}$

2. En una caja con dulces hay 9 chocolates, 5 tamarindos y 7 chicles de la misma forma, peso y envoltura. Si sacas un dulce, ¿qué probabilidad hay de que no te toque un chocolate?

- A)  $\frac{4}{7}$
- B)  $\frac{2}{9}$
- C)  $\frac{3}{5}$
- D)  $\frac{4}{5}$

3. Tenemos dos urnas que contienen cada una bola roja, una azul y una verde, cada una. Si sacamos simultáneamente una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que saquemos dos bolas del mismo color?

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{3}$
- C)  $\frac{1}{4}$
- D)  $\frac{1}{6}$

4. Si se lanza una moneda y un dado numerado de seis caras simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3 y un “águila”?

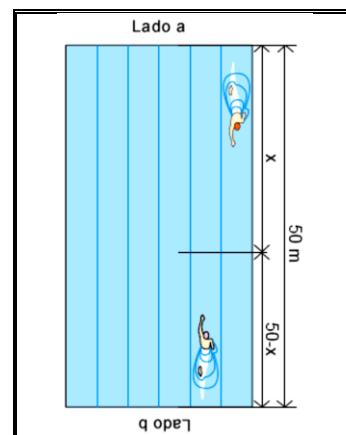
- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{3}$
- C)  $\frac{1}{4}$
- D)  $\frac{1}{6}$

5. Se lanzan dos dados de seis caras simultáneamente, si las caras de los dados están numeradas del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par en el primero y un número mayor que 2 en el segundo?

- A)  $\frac{3}{4}$
- B)  $\frac{1}{3}$
- C)  $\frac{1}{2}$
- D)  $\frac{4}{9}$

**TEMA 7. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS****Bloque V****Eje temático:** Sentido numérico y pensamiento algebraico**Tema:** Patrones y ecuaciones**Contenido:** Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).**Aprendizaje esperado:**

Resuelve problemas que implican el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Introducción:**

En la figura de la tabla de arriba se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?

Para responder la pregunta es preciso notar que las incógnitas se refieren tanto al tiempo como a la distancia. En este tipo de situaciones regularmente es de utilidad el planteamiento y solución de un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** habiendo una transición del enunciado en lenguaje común al lenguaje algebraico.

**Desarrollo:**

A continuación te presentamos algunas maneras de solucionar problemas que implican el planteamiento de **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** y coeficientes enteros. En primer lugar haremos una recapitulación breve sobre ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas.

Posteriormente presentaremos los métodos de solución analítica de estos sistemas y finalizaremos con el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

El planteo de problemas que nacen de hechos de la vida cotidiana conduce, a menudo, al planteo de una o más ecuaciones en las que figuran una o más incógnitas y datos del problema.

Los datos e incógnitas en general, pueden relacionarse por medio de operaciones algebraicas, conduciéndonos al planteo de ecuaciones que, al quedar resueltas, conllevan a la solución de nuestro problema original.

Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas llamadas **incógnitas** se pueden expresar mediante cualquier letra minúscula del abecedario generalmente se usa las letras  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Esta relación se indica con el símbolo "=", el cual se lee "igual" o "es igual a".

**Recuerda**

Una ecuación consta de **dos miembros**, el primer miembro es la expresión algebraica que está a lado izquierdo del símbolo "=" y el segundo miembro está a lado derecho. En cada miembro encontramos términos que están separados por los signos + ó -.

## Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones algebraicas en las que las incógnitas son de primer grado se denominan comúnmente **ecuaciones lineales**, debido a que su representación gráfica es una línea recta. Por ejemplo,

$5x - 7 = 0$  es una ecuación lineal de una incógnita debido a que el exponente de la única incógnita es 1,  
 $4x - 6y = 12$  es ecuación lineal de dos incógnitas debido a que el exponente de ambas incógnitas es 1.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita basta con aplicar las propiedades de la igualdad para aislar a la incógnita, así por ejemplo en  $5x - 7 = 0$  debemos en primer lugar sumar 7 unidades en ambos miembros de la igualdad y posteriormente dividir ambos miembros de la igualdad de manera que con ello encontramos que  $x = \frac{7}{5}$ .

Cuando tenemos ecuaciones lineales con dos incógnitas el procedimiento para encontrar los valores de las dos incógnitas cambia pues con una sola ecuación no nos basta para conocer ambos valores. Debemos entonces tener un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** para poder encontrar los valores de cada incógnita que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

En general podemos decir que

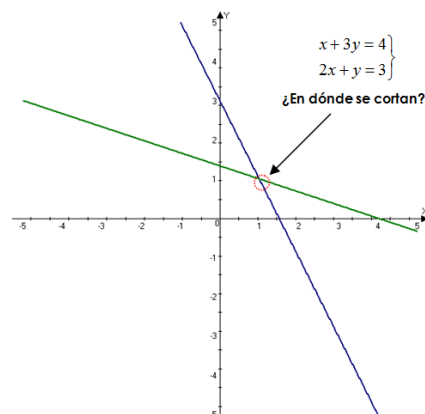
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones del tipo: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

en donde  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ , son números reales y en cada una de las ecuaciones del sistema, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de 0.

Una solución común a las dos ecuaciones, es un par ordenado de números reales tal que al sustituir estos números en cada ecuación del sistema en lugar de las incógnitas  $x$  y  $y$  se obtienen dos identidades numéricas.

¿Cómo podemos resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Cada una de las ecuaciones que forman un *sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas* es una recta que podemos representar en el plano. El **método gráfico** para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en el plano ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde.



El punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del sistema. En el caso de la gráfica de arriba la solución del sistema (punto de intersección es  $x = 1$  y  $y = 1$ ). Nota que estos valores satisfacen al mismo tiempo ambas ecuaciones pues si sustituimos estos valores en las ecuaciones obtenemos un par de identidades numéricas.

Para poder emplear el método gráfico debemos ser muy precisos al momento de hacer los trazos de las rectas que representan a las ecuaciones y determinar de manera muy certera su punto de intersección; sin embargo, no siempre contamos con los instrumentos apropiados para lograr una buena gráfica. Por fortuna, también existen procedimientos basados en manipulaciones algebraicas que permiten transformar las dos ecuaciones del sistema en una ecuación con una sola incógnita, denominados comúnmente **métodos analíticos**.



## Métodos analíticos de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

A continuación te presentamos los métodos analíticos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es preciso mencionar que en todos ellos denotaremos siempre a la primera ecuación por  $E_1$  y a la segunda ecuación por  $E_2$  y que lo que estamos buscando es una pareja de números que satisfagan ambas ecuaciones a la vez.

### 1. Método de igualación

Este procedimiento consiste en seleccionar una incógnita y despejarla de las dos ecuaciones del sistema para después **igualar** las dos expresiones obtenidas de forma que se obtenga una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad y se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones donde quedó despejada la incógnita seleccionada al principio.

Pasos del método de igualación:

1. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualar las expresiones despejadas y así se obtiene una ecuación lineal para la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior aplicando las propiedades de la igualdad.
4. Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas en el paso 1, con el propósito de calcular el valor de la otra incógnita.
5. Comprobar los resultados.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema  $\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$  por el método de igualación.

1. Se despeja  $x$  de las ecuaciones  $E_1$  y  $E_2$

$$x = \frac{10 + 2y}{4} = \frac{5 + y}{2} \quad ; \quad x = \frac{14 - 5y}{3}$$

2. Se igualan estas dos ecuaciones

$$\frac{5 + y}{2} = \frac{14 - 5y}{3}$$

3. Se resuelve en términos de  $y$

$$\begin{aligned} 3(5 + y) &= 2(14 - 5y) \\ 3y + 10y &= 28 - 15 \\ 13y &= 13 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

4. Se sustituye este valor en la primera ecuación despejada para encontrar el valor de  $x$

$$x = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

5. Se realiza la comprobación

$$\begin{aligned} 4(3) - 2(1) &= 10 \\ 12 - 2 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ 3(3) + 5(1) &= 14 \\ 9 + 5 &= 14 \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

Por tanto la solución al sistema es  $x = 3$  y  $y = 1$ .

## 2. Método de eliminación

Este procedimiento, también conocido como método de suma y resta, consiste en igualar los coeficientes numéricos de una de las incógnitas (multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada) para, por medio de la suma o resta de las ecuaciones, **eliminar** la incógnita elegida y reducir el sistema a una sola ecuación lineal con una incógnita para resolverla empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de eliminación:

1. Igualar los coeficientes de una de las incógnitas, multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada.
2. Sumar o restar según convenga ambas ecuaciones para eliminar la incógnita de coeficientes iguales y obtener una nueva ecuación en términos solamente de la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en paso anterior.
4. Despejar la otra incógnita de cualquiera de las ecuaciones del sistema.
5. Sustituir el valor obtenido en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
6. Comprobar los resultados.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema  $\begin{cases} -8x + 14y = -20 \\ -5x + 7y = -16 \end{cases}$  por el método de eliminación.

1. Se multiplica la ecuación  $E_2$  por  $-2$

$$\begin{aligned} -2(-5x + 7y) &= -2(-16) \\ 10x - 14y &= 32 \end{aligned}$$

2. Se suma esta nueva ecuación con la ecuación  $E_1$

$$\begin{array}{r} -8x + 14y = -20 \\ 10x - 14y = 32 \\ \hline 2x + 0 = 12 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante para  $x$

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \\ x &= \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

4. Se despeja  $y$  de  $E_1$

$$y = \frac{-20 + 8x}{14} = \frac{-10 + 4x}{7}$$

5. Se sustituye  $x = 6$  en la ecuación despejada

$$y = \frac{-10 + 4x}{7} = \frac{-10 + 4(6)}{7} = \frac{-10 + 24}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

6. Se hace la comprobación

$$\begin{array}{ll} -8(6) + 14(2) = -20 & -5(6) + 7(2) = -16 \\ -48 + 28 = -20 & -30 + 14 = -16 \\ -20 = -20 & -16 = -16 \end{array}$$

Por tanto la solución al sistema es  $x = 6$  y  $y = 2$ .

### 3. Método de sustitución

Este procedimiento consiste en despejar una de las incógnitas de alguna de las ecuaciones del sistema y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación, para obtener una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de sustitución:

1. Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
2. Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en el paso anterior.
4. Sustituir este valor en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Se realiza la comprobación.

Ejemplo 3:

Resolver el sistema  $\begin{cases} 10x + 4y = -34 \\ -5x + 2y = 13 \end{cases}$  por el método de sustitución.

1. Se despeja  $x$  de la ecuación  $E_1$

$$x = \frac{-34 - 4y}{10} = \frac{-17 - 2y}{5}$$

2. Se sustituye la expresión despejada en  $E_2$

$$\begin{aligned} -5\left(\frac{-17 - 2y}{5}\right) + 2y &= 13 \\ 17 + 4y &= 13 \end{aligned}$$

3. Se resuelve la ecuación lineal para  $y$

$$\begin{aligned} 17 + 4y &= 13 \\ y &= \frac{13 - 17}{4} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

4. Se sustituye  $y = -1$  en la ecuación despejada anteriormente para obtener el valor de  $x$

$$x = \frac{-34 - 4(-1)}{10} = \frac{-34 + 4}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$

5. Se realiza la comprobación

$$\begin{aligned} 10(-3) + 4(-1) &= -34 \\ -30 - 4 &= -34 \\ -34 &= -34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(-3) + 2(-1) &= 13 \\ 15 - 2 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto la solución al sistema es  $x = -3$  y  $y = -1$ .

#### Actividad 1



Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando cada uno de los métodos expuestos (igualación, eliminación y sustitución).

1.  $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x - y = 10 \\ 7x + 3y = 0 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \end{cases}$

## Solución de problemas con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

A continuación mostraremos la utilidad de lo que hemos expuesto ya que con frecuencia nos encontramos con situaciones en las que intervienen dos cantidades desconocidas y nos vemos en la necesidad del planteamiento y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para resolver tales situaciones. Mostraremos algunos ejemplos de cómo plantear las ecuaciones a partir de un enunciado en el lenguaje común, dando los valores de las incógnitas que resuelven el sistema planteado. Dejaremos para ti el ejercicio de verificar, por cualquiera de los métodos expuestos que los valores dados sean correctos.

Situación 1:

*Un almacenista tiene dulces de \$45 el kilo y otros de \$70 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 120 kilos que resulten a \$55 el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deberá poner?*

Si definimos a  $x$  y a  $y$  como la cantidad de kilos de los dulces de a \$45 y de a \$70, respectivamente y considerando que la mezcla de dulces debe pesar 120 kilos podemos plantear la ecuación  $x + y = 120$ ; por otro lado el costo por kilo de la mezcla debe de ser \$55 por lo que el costo total de la mezcla es  $\$55 \times 120 = \$6600$  y esto debe de ser igual a la suma del costo de la cantidad de kilos de  $x$  y del costo de la cantidad de kilos de  $y$ , es decir  $45x + 70y = 6600$ . Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	Sistema de Ecuaciones
$x = \text{kilos de dulces de } \$45$	$\begin{cases} x + y = 120 \\ 45x + 70y = 6600 \end{cases}$
$y = \text{kilos de dulces de } \$70$	

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que para elaborar la mezcla deseada el almacenista tiene que poner **72 kilos de dulces de a \$45 y 48 kilos de dulces de a \$70**.

Situación 2:

*El mes pasado Juan compró 6 kilos de café y 5 kilos de té, en total gasto \$56. Hace una semana con \$58 le alcanzó para 4 kilos de té y 7 kilos de café. Ahora él desea saber cuanto cuesta un kilo de café y cuanto cuesta un kilo de té. ¿Podrías ayudarlo a encontrar la respuesta?*

Si definimos a  $x$  como el costo del kilo de café y a  $y$  como el costo del kilo de té, del problema planteado podemos decir que el mes pasado Juan compro  $6x + 5y = 56$  pesos y la semana pasada Juan gasto  $4y + 7x = 58$  pesos. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	Sistema de Ecuaciones
$x = \text{costo del kilo de café}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 56 \\ 7x + 4y = 58 \end{cases}$
$y = \text{costo del kilo de té}$	

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que a Juan le cuesta **el kilo de café a \$6 y el kilo de té a \$4**.

## Situación 3:

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres y cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores. ¿Cuántos aviones de tres motores hay? ¿Y cuantos hay de cuatro motores?

Si definimos a  $t$  como el número de aviones con tres motores y a  $c$  como el número de aviones con cuatro motores, entonces del problema planteado tenemos, que considerando que se tienen 20 aviones bimotores, la compañía cuenta con  $20+t+c=55$  aviones; por otra parte, el número total de motores se obtiene multiplicando por 2 al número de aviones de dos motores, por 3 al número de aviones de tres motores y por 4 al número de aviones de cuatro motores, es decir,  $2(20)+3t+4c=170$  motores. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas

 $t =$  aviones con tres motores $c =$  aviones con cuatro motores

Sistema de Ecuaciones

$$\begin{cases} t + c = 35 \\ 3t + 4c = 130 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que la compañía de aviación cuenta con **10 aviones de tres motores y 25 aviones de 4 motores.**

## Actividad 2

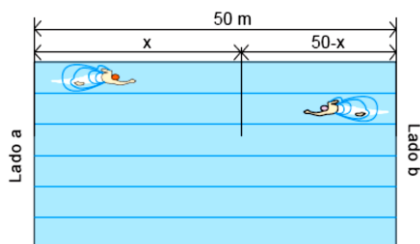


Para cada uno de los siguientes problemas plantea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y encuentra la solución.

1. En una biblioteca hay un total de 68 libros entre libros de Español y Matemáticas de nivel básico, si la cantidad de libros de Español es el triple que la cantidad de libros de Matemáticas. ¿Cuántos libros de cada tipo hay en la biblioteca?
2. En una zapateria hay una promoción de calzados. Por 2 pares de botas y tres pares de zapatillas se paga \$3000. Si el par de zapatillas vale \$30 menos que el par de botas. ¿Cuánto cuesta el par de zapatillas y el par de botas?
3. El precio de 3 borradores y 5 libretas es \$360. Si la libreta cuesta el triple de lo que cuesta un borrador. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Se va a pintar el muro de una escuela que tienen forma rectangular y se necesita saber su superficie para estimar la cantidad de pintura que se ocupará. Si se sabe que el perímetro del muro mide 26 metros y que su base mide 7 metros más que su altura. ¿Cuál es el área del muro?

Ahora, reconsideremos el problema planteado en la introducción:

**En la figura se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?**



En el problema observa que si ambos nadadores se cruzan al cabo de  $t$  segundos a una distancia de  $x$  metros del lado  $a$ , mientras el primero ha recorrido  $x$  metros el segundo ha recorrido  $50 - x$  metros.

La velocidad es igual a la distancia recorrida sobre tiempo de recorrido,  $v = \frac{d}{t}$ , para el primer nadador  $d = x$ , o sea que  $v = \frac{x}{t}$ , de lo anterior tenemos que  $x = vt$ .

Como la velocidad del primer nadador es  $6 \frac{m}{s}$  entonces  $x = 6t$ . Análogamente, para el segundo nadador  $d = 50 - x$  y obtenemos la ecuación  $50 - x = 4t$ .

De lo anterior se pueden escribir entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 6t \\ 50 - x &= 4t \end{aligned}$$

Y así obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolviendo el sistema tenemos que

$$\begin{aligned} 50 - 6t &= 4t \\ 10t &= 50 & \text{y} & \quad x = 6(5) \\ t &= 5 & & \quad x = 30 \end{aligned}$$

Lo cual quiere decir que los nadadores se encuentran en un tiempo  $t = 5$  s y a una distancia  $x = 30$  m lado “a” de la piscina.

### Cierre:



En este tema hemos hecho un repaso breve ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas. Así mismo, se presentaron los métodos de solución analítica de estos sistemas y se mostro su utilidad en el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

Aquí te presentamos un esquema que resume las formas en que se pueden resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### ¿Cómo se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

#### Gráficamente

Se representan las dos rectas en un mismo sistema de coordenadas y se determinan, con la mayor precisión posible, las coordenadas del punto de corte. Para esto se puede usar papel milimetrado o un software.

#### Analíticamente

Se usan métodos basados en manipulaciones algebraicas: igualación, sustitución o reducción, que permiten transformar las ecuaciones del sistema a una ecuación con una sola incógnita.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más...



[http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b05\\_t01\\_s](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t01_s)

[01\\_descartes/TS\\_1\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t01_s)

[http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b05\\_t03\\_s](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t03_s)

[01\\_descartes/TS\\_1\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t03_s)

<http://www.yair.es/xms/algebra/sistemas/elementales/imagenes/elementales.swf>

**Evaluación:**

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Selecciona de los siguientes problemas el que se resuelve con el sistema de ecuaciones:

$$2x + 2y = 65$$

$$x = 3y$$

- A) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 65 cm y que su base es el triple de su altura?
- B) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado si cada lado equivale a un cuarto de su área y esta es igual a 65?
- C) ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo sabiendo que su largo es el doble de su ancho y que su área es igual a 65?
- D) ¿Cuál es el área de un cuadrado sabiendo que cada lado equivale a  $2x-1$  y que su perímetro es igual a 65?

2. Selecciona de los siguientes problemas el que se resuelve con el sistema de ecuaciones:

$$x = 4y$$

$$x + y = 70$$

- A) Pancho es mayor que José por cuatro años, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.
- B) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la edad de pancho es igual a la edad de José más 70. Calcular las edades.
- C) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la diferencia de sus edades es 70 años. Calcular las edades.
- D) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

3. Lee el siguiente problema:

El perímetro de un rectángulo mide 36 cm y la diferencia entre la base y la altura es de 8 cm. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema?

A) 
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

C) 
$$\begin{cases} 2x + y = 36 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

B) 
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ \frac{x}{y} = 8 \end{cases}$$

D) 
$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

4. El precio de 5 lápices y 7 bolígrafos es \$155. Si un lápiz cuesta \$5 menos que un lapicero. ¿Cuál es el precio de un lápiz?

A) 10

B) 12

C) 15

D) 16

5. El cajero de un cine sabe que en una sala hay 500 butacas ocupadas y que el total de dinero en caja por las entradas a esa sala es de \$13000 Si cada adulto pagó \$30 y cada niño pagó \$20 por su entrada. ¿Cuántos adultos y cuantos niños hay en la sala?

A) 350 adultos y 150 niños

B) 300 adultos y 200 niños

C) 150 adultos y 350 niños

D) 200 adultos y 300 niños

## TEMA 8. RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO

## Bloque V

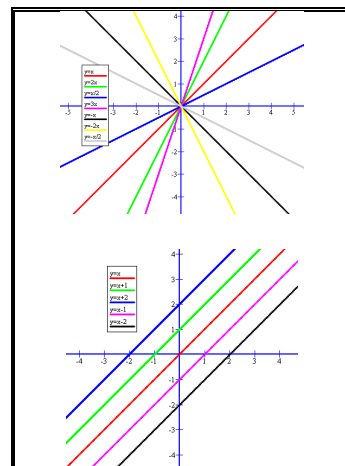
Eje temático: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función  $y = mx + b$ , en la gráfica correspondiente

## Aprendizaje esperado:

Identifica los efectos de los parámetros  $m$  y  $b$  de la función  $y = mx + b$ , en la gráfica que corresponde.



## Introducción:



Tres autobuses A, B y C salen de la terminal de autobuses en momentos distintos, todos a una velocidad constante de 80 km/hr. Si el autobús B sale cuando el autobús A se ha desplazado 20 km y el autobús C sale cuando el autobús B se ha desplazado 30 km, realiza una gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C.

En el planteamiento anterior existen implícitos algunos conceptos clave para realizar lo que se pide, que tienen que ver con la velocidad constante de los autobuses y el hecho de que cuando sale el autobús C los otros dos llevan ya algún kilometraje recorrido. A continuación te presentamos estos conceptos clave que tienen que ver con las **rectas en el plano cartesiano**.

## Desarrollo:

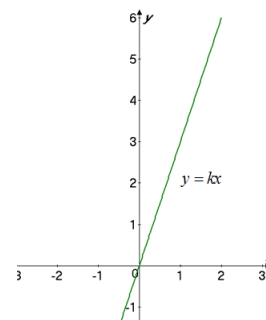


Para poder realizar lo que se pide en el problema de la introducción es necesario que repasemos un par de conceptos clave que tienen que ver con las rectas en el plano cartesiano, **la pendiente y la ordenada al origen**. Ambos conceptos son imprescindibles cuando queremos graficar y analizar el comportamiento de un grupo de rectas en el plano cartesiano.

## Pendiente de una recta

La gráfica de la expresión  $y = kx$  está formada por el grupo de puntos localizados sobre una línea recta que pasa por el origen, como la que te mostramos en la figura de la derecha.

Notarás que en la gráfica, los valores de  $y$  van aumentando conforme lo hacen los valores de  $x$ , por lo que decimos que  $x$  y  $y$  se encuentran en una relación de proporcionalidad directa. De esto concluimos que la expresión algebraica asociada a una relación de proporcionalidad directa es de la forma  $y = kx$ , donde  $k$  se conoce como la constante de proporcionalidad.



Una relación de **proporcionalidad directa** entre dos magnitudes es aquella en la que, si los valores de una de las magnitudes se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número. Por ejemplo:

- ❖ El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar.
- ❖ El tiempo transcurrido y la distancia recorrida a una velocidad constante.

## Recuerda

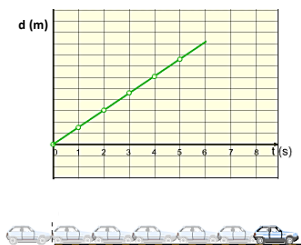




De acuerdo a lo anterior, podemos decir que en las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la **razón** entre pares de valores correspondientes a las variables involucradas. Por ejemplo si un automóvil viaja a velocidad  $v$  constante, la distancia recorrida  $d$  y el tiempo transcurrido  $t$  se encuentran en una relación de proporcionalidad directa. Lo anterior quiere decir que a mayor tiempo transcurrido, mayor será la distancia recorrida (observa la figura de la derecha), lo cual se expresa de la siguiente manera

$$v = \frac{d}{t}$$

De donde verificamos que la razón  $\frac{d}{t}$  es la cantidad que permanece constante. Podemos describir la fórmula de la velocidad como  $d = vt$ , de esta manera queda en la forma de la expresión algebraica asociada a una relación de proporcionalidad directa,  $y = kx$ . En este caso observa que la velocidad  $v$  es la **constante de proporcionalidad**.



En las expresiones algebraicas asociadas a una relación de proporcionalidad directa del tipo  $y = kx$ , la constante de proporcionalidad  $k$  representa la **pendiente** de la recta que obtenemos al realizar su gráfica, de manera que entre mayor es el valor de  $k$ , mayor es el **ángulo de inclinación** de la recta.

Cualquier recta que no esté en posición horizontal o vertical está inclinada. La **inclinación** se da como una medida del **ángulo** que forma la recta con la horizontal. Se llama **ángulo de inclinación** al ángulo formado por la recta y el extremo positivo de eje  $x$ , a partir de éste girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

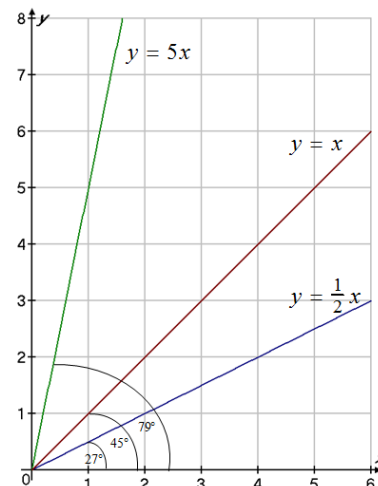
**Recuerda**



En la derecha se muestran las gráficas de tres rectas del tipo  $y = kx$ . Observa que, a medida que aumenta el valor de  $k$ , el ángulo de inclinación aumenta. Así, cuando  $k = \frac{1}{2}$  el ángulo de inclinación es de  $27^\circ$ , cuando  $k = 1$  el ángulo de inclinación es de  $45^\circ$  y cuando  $k = 5$  el ángulo de inclinación es de  $79^\circ$ .

En general podemos decir que:

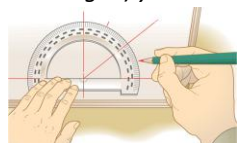
- ❖ Para todos los valores de  $k$  que sean mayores que 0 pero menores que 1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que  $0^\circ$  pero menores que  $45^\circ$ .
- ❖ Para todos los valores de  $k$  que sean mayores 1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que  $45^\circ$  pero menores que  $90^\circ$ .



Para medir el ángulo de inclinación de una línea recta con pendiente positiva se hace lo siguiente:

**Recuerda**

1. Se coloca el centro del transportador en el punto en el que la recta corta el eje  $x$  (en este caso es el origen) y el extremo derecho del transportador sobre el eje  $x$  positivo.

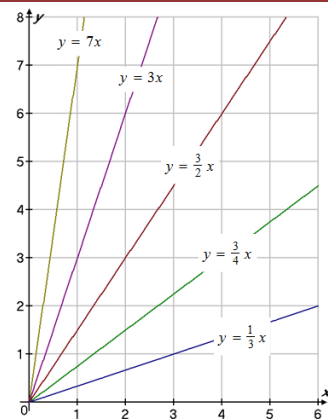


2. Contamos los grados en el transportador desde la parte derecha del eje  $x$  hasta el grado en el que el transportador es cruzado por la línea.
3. El número de grados que contamos hasta que la recta cruza el transportador es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje  $x$ .

**Actividad 1**

Con un transportador mide cada uno de los ángulos de inclinación de las rectas mostradas en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y = \frac{1}{3}x$	
$y = \frac{3}{4}x$	
$y = \frac{3}{2}x$	
$y = 3x$	
$y = 7x$	

**Pendiente negativa de una recta**

Hasta ahora hemos revisado expresiones algebraicas del tipo  $y = kx$  en las que la pendiente  $k$  ha sido siempre positiva, es decir, sus ángulos de inclinación son mayores que  $0^\circ$  pero menores que  $90^\circ$ . Pero ¿qué sucede cuando el ángulo de inclinación de una recta es mayor a los  $90^\circ$ ?

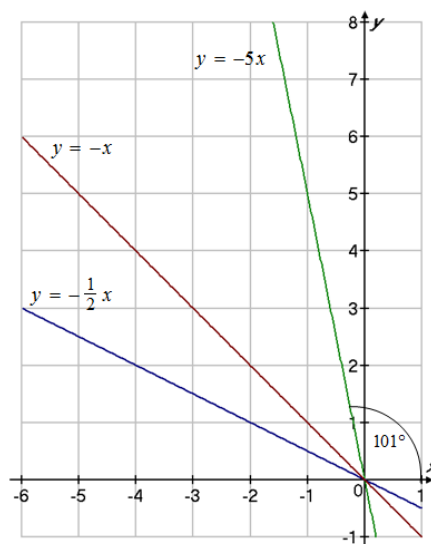
Cuando el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es **mayor a los  $90^\circ$  y menor a los  $180^\circ$** , la **pendiente  $k$**  de su expresión algebraica tiene **signo negativo**.

$$y = -kx$$

En la derecha se muestran las gráficas de tres rectas del tipo  $y = -kx$ . Observa que solamente la recta  $y = -5x$  tiene el valor de su ángulo de inclinación,  $101^\circ$ . Con un transportador mide el ángulo de las otras dos rectas. Si realizas correctamente las mediciones notarás que en estos casos, a medida que se hace menor (más negativo) el valor de  $k$ , el ángulo de inclinación disminuye. Así, cuando  $k = -\frac{1}{2}$  el ángulo de inclinación es de  $153^\circ$ , cuando  $k = -1$ , el ángulo de inclinación es de  $135^\circ$  y cuando  $k = -5$ , el ángulo de inclinación es de  $101^\circ$ .

En general podemos decir que:

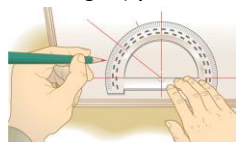
- ❖ Para todos los valores de  $k$  que sean menores que 0 pero mayores que  $-1$ , el ángulo de inclinación tiene valores mayores que  $135^\circ$  pero menores que  $180^\circ$ .
- ❖ Para todos los valores de  $k$  que sean menores a  $-1$ , el ángulo de inclinación tiene valores mayores que  $90^\circ$  pero menores que  $135^\circ$ .



Para medir el ángulo de inclinación de una línea recta con pendiente negativa se hace lo siguiente:

**Recuerda**

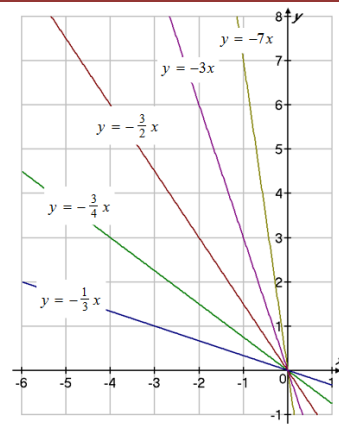
1. Se coloca el centro del transportador en el punto en el que la recta corta el eje  $x$  (en este caso es el origen) y el extremo izquierdo del transportador sobre el eje  $x$  negativo.
2. Contamos los grados en el transportador desde la parte izquierda del eje  $x$  hasta el grado en el que el transportador es cruzado por la línea.
3. El número de grados que contamos hasta que la recta cruza el transportador los restamos a  $180^\circ$  y el resultado es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje  $x$ .



**Actividad 2**

Con un transportador mide cada uno de los ángulos de inclinación de las rectas mostradas en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y = -\frac{1}{3}x$	
$y = -\frac{3}{4}x$	
$y = -\frac{3}{2}x$	
$y = -3x$	
$y = -7x$	



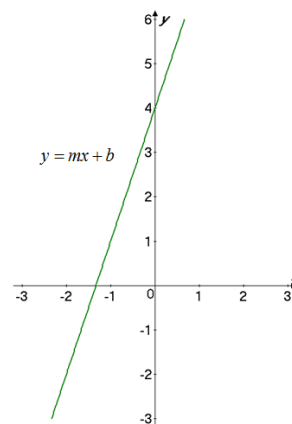
Hasta aquí habrás notado que todas las rectas de la forma  $y = kx$  (que pasan por el origen y tienen pendiente positiva) tienen ángulos de inclinación respecto del eje  $x$  mayores de  $0^\circ$  y menores de  $90^\circ$ , mientras que las rectas de la forma  $y = -kx$  (que pasan por el origen y tienen pendiente negativa) tienen ángulos de inclinación respecto del eje  $x$  mayores de  $90^\circ$ , pero menores de  $180^\circ$ .

**La ordenada al origen de una recta**

La gráfica de la expresión  $y = mx + b$  también está formada por el grupo de puntos localizados sobre una línea recta, pero a diferencia de las gráficas de expresiones del tipo  $y = kx$  ó  $y = -kx$ , ésta no pasa por el origen, como la que te mostramos en la figura de la derecha.

Notarás que en la gráfica la recta no corta a los ejes en el origen, sino que lo hace, para cada uno de los ejes  $x$  y  $y$ , a una cierta distancia desde el origen.

A la distancia desde el origen en el que una recta corta al eje  $y$  se le llama **ordenada al origen** y corresponde a la letra  $b$  de la expresión algebraica  $y = mx + b$  de la recta.



Cuando hablamos de rectas en el plano con **ordenada al origen**  $b$ , dejamos de denotar a la pendiente de la recta con la letra  $k$  y la sustituimos por la letra  $m$ , de manera que en la expresión algebraica  $y = mx + b$ ,  $m$  es la **pendiente de la recta**.

Observa en la gráfica que la recta corta al eje  $y$  en 4, por lo que la ordenada al origen es  $b = 4$ , de hecho, la expresión algebraica específica de esa recta es  $y = \frac{8}{3}x + 4$ , entonces, de acuerdo con lo anterior, la pendiente de esa recta es  $m = \frac{8}{3}$  y, por ser esta positiva, su ángulo de inclinación está entre los  $0^\circ$  y los  $90^\circ$ .

El ángulo de inclinación de una recta del tipo  $y = mx + b$  se mide de la misma forma que lo hacemos con las rectas del tipo  $y = kx$ , con la salvedad de que para estas rectas colocamos el transportador en el punto en el que la recta corta al eje  $x$  y no en el origen.

**Recuerda**

En la derecha se muestran las gráficas de cinco rectas del tipo  $y = mx + b$ . En todas ellas se mantiene constante la pendiente  $m = 2$  y los valores de la ordenada al origen  $b$  son diferentes.

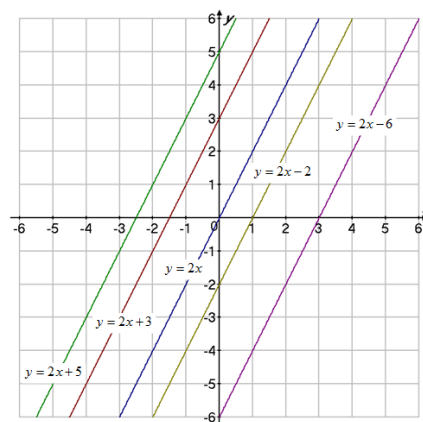
Nota que la recta en color azul tiene una ordenada al origen  $b = 0$  y es la única que pasa por el origen, mientras que las demás cortan al eje  $y$  a una distancia positiva o negativa respecto del origen.

Observa también que estas rectas, al tener la misma pendiente  $m$ , nunca se cortan, es decir, son rectas paralelas.

¿Qué efecto tiene entonces la ordenada al origen  $b$  en una familia de rectas con la misma pendiente  $m$ ?

En general podemos decir que:

En una familia de rectas  $y = mx + b$  con la misma pendiente  $m$ , la ordenada al origen  $b$  indica el número de unidades (hacia arriba o hacia abajo) que sobre el eje  $y$  se desplaza la recta  $y = mx$ .

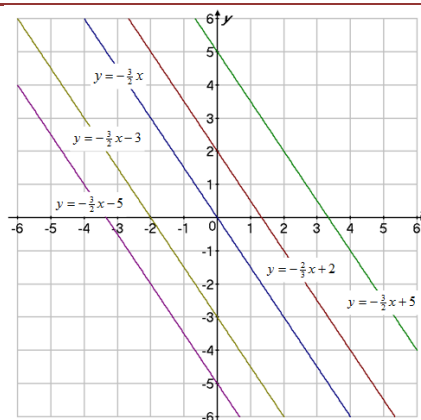


### Actividad 3



Observa la familia de rectas mostrada en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Pendiente	Ordenada al origen
$y = -\frac{3}{2}x + 5$		
$y = -\frac{3}{2}x + 2$		
$y = -\frac{3}{2}x$		
$y = -\frac{3}{2}x - 3$		
$y = -\frac{3}{2}x - 5$		



Ahora ya estamos en condiciones de responder al planteamiento hecho en la introducción:

**Tres autobuses A, B y C salen de la terminal de autobuses en momentos distintos, todos a una velocidad constante de 80 km/hr. Si el autobús B sale cuando el autobús A se ha desplazado 20 km y el autobús C sale cuando el autobús B se ha desplazado 30 km, realiza una gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C.**

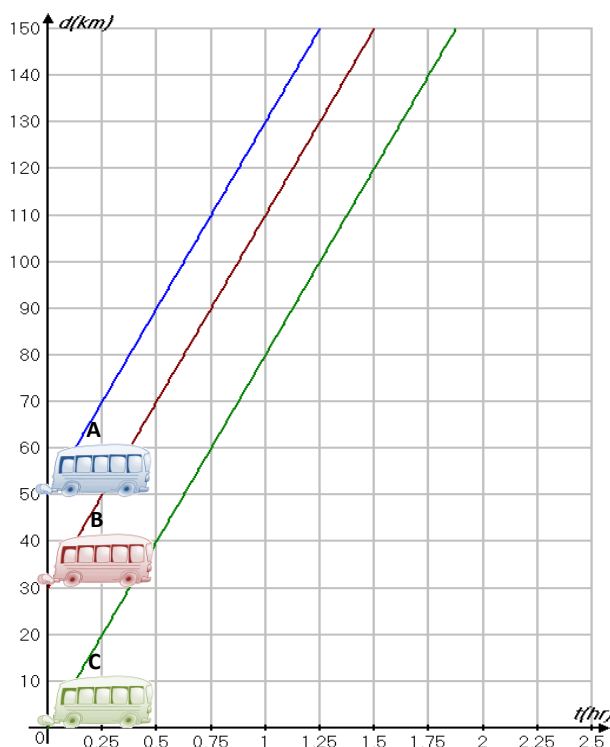
Lo primero que hay que observar es que los tres autobuses van a una velocidad constante de 80 km/hr, por lo que en una gráfica el desplazamiento respecto del tiempo de los autobuses se verá como una línea recta con una **pendiente** igual a 80.

Como nos piden que la gráfica comience a partir de que el autobús C sale de la terminal, su recta debe comenzar en el origen, por lo que su expresión algebraica es del tipo  $y = mx$ , donde  $y$  será el desplazamiento  $d$  en kilómetros,  $m$  será la velocidad constante  $v = 80$  km/hr y  $x$  será el tiempo  $t$  en horas, de manera que su expresión algebraica queda como  $d = 80t$ .

Al momento que sale el autobús C de la terminal, los autobuses B y A llevan desplazamientos de 30 km y 50 km, respectivamente y, como hemos designado al eje vertical para los valores de los desplazamientos, estos valores

representan las **ordenadas al origen** de las rectas correspondientes a los autobuses B y A, en una familia de rectas del tipo  $d = 80t + b$ .

Las expresiones algebraicas para los autobuses B y A son  $d = 80t + 30$  y  $d = 80t + 50$  respectivamente, por lo que una posible gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C quedaría como la siguiente.



### Cierre:



En este tema hemos hecho un repaso breve sobre un par de conceptos clave que tienen que ver con las rectas en el plano cartesiano, **la pendiente y la ordenada al origen**. Pudiste notar que ambos conceptos son imprescindibles cuando queremos graficar y analizar el comportamiento de un grupo de rectas en el plano cartesiano.

Ten siempre presente que:

- ❖ Cuando el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es mayor a los  $0^\circ$  y menor a los  $90^\circ$ , la pendiente  $k$  de su expresión algebraica tiene signo positivo,  $y = kx$ .
- ❖ Cuando el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es mayor a los  $90^\circ$  y menor a los  $180^\circ$ , la pendiente  $k$  de su expresión algebraica tiene signo negativo,  $y = -kx$ .
- ❖ En una familia de rectas  $y = mx + b$  con la misma pendiente  $m$ , la ordenada al origen  $b$  indica el número de unidades (hacia arriba o hacia abajo) que sobre el eje  $y$  se desplaza la recta  $y = mx$ .

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más... [http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b03\\_t07\\_s01\\_descartes/TS\\_1\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t07_s01_descartes/TS_1_index.html)

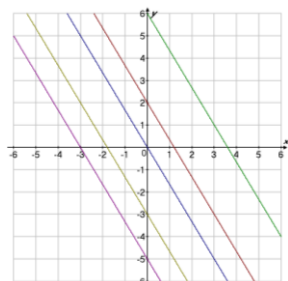


[http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2\\_segundo/2\\_Matematicas/2m\\_b03\\_t03\\_s01\\_descartes/TS\\_4\\_index.html](http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t03_s01_descartes/TS_4_index.html)

**Evaluación:**

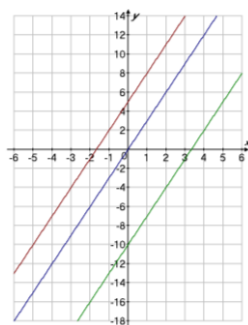
Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

**Indicaciones:** En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

**1. Observa la siguiente gráfica**

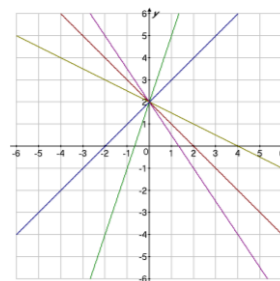
¿Cuál de las siguientes opciones describe de manera correcta a esta familia de rectas?

- A) Rectas con pendiente constante positiva
- B) Rectas con pendiente constante negativa
- C) Rectas con ordenada al origen constante positiva
- D) Rectas con ordenada al origen constante negativa

**2. Observa la siguiente gráfica que hizo Roberto para su tarea:**

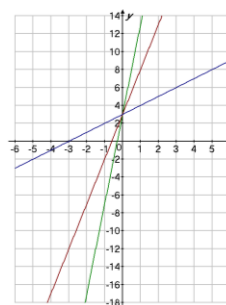
¿Cuál de las siguientes opciones identifica de manera correcta a la familia de rectas que graficó Roberto?

- |                 |                  |
|-----------------|------------------|
| A) $y = 3x + 5$ | B) $y = -3x + 5$ |
| $y = 3x$        | $y = -3x$        |
| $y = 3x - 10$   | $y = -3x - 10$   |
| C) $y = 5x + 3$ | D) $y = 3x + 5$  |
| $y = x + 3$     | $y = x + 5$      |
| $y = 10x + 3$   | $y = 10x + 5$    |

**3. Observa la siguiente gráfica**

¿Cuál de las siguientes opciones describe de manera correcta a esta familia de rectas?

- A) Rectas con pendiente constante positiva
- B) Rectas con pendiente constante negativa
- C) Rectas con ordenada al origen constante positiva
- D) Rectas con ordenada al origen constante negativa

**4. Observa la siguiente gráfica que la maestra Mónica desarrollo en clase de matemáticas:**

¿Cuál de las siguientes opciones identifica de manera correcta a la familia de rectas que graficó la maestra?

- |                 |                  |
|-----------------|------------------|
| A) $y = 3x + 5$ | B) $y = -3x + 5$ |
| $y = 3x$        | $y = -3x$        |
| $y = 3x - 10$   | $y = -3x - 10$   |
| C) $y = 5x + 3$ | D) $y = 3x + 5$  |
| $y = x + 3$     | $y = x + 5$      |
| $y = 10x + 3$   | $y = 10x + 5$    |

## RESPUESTAS DE LAS ACTIVIDADES

## TEMA 1 POTENCIAS NEGATIVAS

**Actividad 1**  
(Pág. 40)

(b)  $5^7 =$

(e)  $5^2 \times 5^3 \times 5 =$

(c)  $5^9 =$

(a)  $5^4 \times 5^6 =$

(f)  $5 \times 5^2 \times 5 =$

**Actividad 2**  
(Pág. 42)

(d)  $\frac{4^6}{4^4} =$

(g)  $\frac{4^5}{4^4} =$

(e)  $4^4 =$

(c)  $\frac{4^3}{4^3} =$

(a)  $\frac{4^{10}}{4} =$

**Actividad 3**  
(Pág. 43)

(d)  $3^{12} =$

(e)  $(3^2)^4 =$

(c)  $(3^0)^9 =$

(b)  $(3^5)^2 =$

(f)  $(3^3)^6 =$

**Actividad 4**  
(Pág. 44)

(c)  $(5^3 \times 7^2)^4 =$

(e)  $6^{12} \times 4^{15} \times 7^9 =$

(g)  $(10^2 \times 9^5 \times 2^3)^0 =$

(b)  $5^6 \times 7^4 =$

(f)  $(6^4 \times 4^3 \times 7^2)^5 =$

**Actividad 5**  
(Pág. 45)

(c)  $(6^2)^{-3} =$

(f)  $6^{-4} \times 6^{-3} =$

(g)  $(6^3 \times 6^5)^{-2} =$

(a)  $(6^{-1} \times 6^{-4})^{-2} =$

(d)  $(6^3 \times 3^4)^{-3} =$

## TEMA 2 ÁNGULOS ENTRE PARALELAS Y UNA SECANTE

**Actividad 1** (Pág. 52)

1. Son 4 parejas de ángulos correspondientes:

$\angle a$  y  $\angle d$ ;  $\angle b$  y  $\angle c$ ;  $\angle e$  y  $\angle h$ ,  $\angle f$  y  $\angle g$ .

2. Son 2 parejas de ángulos alternos internos:

$\angle c$  y  $\angle f$ ;  $\angle d$  y  $\angle e$ .

Son 2 parejas de ángulos alternos externos:

$\angle a$  y  $\angle h$ ;  $\angle b$  y  $\angle g$ .

3.  $\angle a = \angle d = \angle e = \angle h = 115^\circ$ ;  $\angle b = \angle c = \angle f = \angle g = 65^\circ$ 

## TEMA 3 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

**Actividad 1** (Pág. 58)

1.

$Mo = 136 \text{ cm}$

$\bar{x} = 134.8 \text{ cm}$

$Me = 135 \text{ cm}$

2. La mediana porque nos

indica que el 50% de los alumnos mide más de 135 cm y en la tabla vemos que efectivamente 6 de los 12 alumnos miden 136 cm o más.

## TEMA 4 PRISMAS Y PIRÁMIDES

**Actividad 1** (Pág. 65)

Se observa que el volumen de una pirámide cabe 3 veces en el volumen de un prisma de la misma base que la pirámide.

**Actividad 2** (Pág. 65)

1.

$A_1 = 211.2 \text{ cm}^2$

$V = 156 \text{ cm}^3$

2.

$A_1 = 547.2 \text{ cm}^2$

$V = 936 \text{ cm}^3$

3.

$A_1 = 197.4 \text{ cm}^2$

$V = 490 \text{ cm}^3$

## TEMA 5 PROPORCIONALIDAD INVERSA

**Actividad 1** (Pág. 70)

1.

$xy = 1.2$

2.

$y = 1.33 \text{ dm}^3$

3.

$x = 0.8 \text{ atmósferas}$

## TEMA 6 SITUACIONES ALEATORIAS

**Actividad 1** (Pág. 77)1.  $P = 0.63$ 2.  $P = 0.5$ 3.  $P = 0.167$ 

## TEMA 7 ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

**Actividad 1** (Pág. 83)

1.  $x = 2$   $y = 4$

2.  $x = 3$   $y = -7$

3.  $x = 3$   $y = 4$

**Actividad 2** (Pág. 85)

1.

$$\begin{cases} E + M = 68 \\ E = 3M \\ M = 17 \quad E = 51 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2B + 3Z = 3000 \\ Z = B - 30 \\ B = \$618 \quad E = \$588 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3B + 5L = 360 \\ L = 3B \\ B = \$20 \quad L = \$60 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2b + 2h = 26 \\ b = h + 7 \\ b = 10 \text{ m} \quad h = 10 \text{ m} \\ A = 30 \text{ m}^2 \end{cases}$$

## TEMA 8 RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO

**Actividad 1** (Pág. 90)

Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y = \frac{1}{3}x$	$18.4^\circ$
$y = \frac{3}{4}x$	$36.9^\circ$
$y = \frac{3}{2}x$	$56.3^\circ$
$y = 3x$	$71.6^\circ$
$y = 7x$	$81.9^\circ$

**Actividad 2** (Pág. 91)

Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y = -\frac{1}{3}x$	$161.6^\circ$
$y = -\frac{3}{4}x$	$143.1^\circ$
$y = -\frac{3}{2}x$	$123.7^\circ$
$y = -3x$	$108.4^\circ$
$y = -7x$	$98.1^\circ$

**Actividad 3** (Pág. 92)

Expresión algebraica	Pendiente	Ordenada al origen
$y = -\frac{3}{2}x + 5$	$-\frac{3}{2}$	5
$y = -\frac{3}{2}x + 2$	$-\frac{3}{2}$	2
$y = -\frac{3}{2}x$	$-\frac{3}{2}$	0
$y = -\frac{3}{2}x - 3$	$-\frac{3}{2}$	-3
$y = -\frac{3}{2}x - 5$	$-\frac{3}{2}$	-5

## RESPUESTAS DE LAS EVALUACIONES

## TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

## TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

## TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

## TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

## TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>

## TEMA 6

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

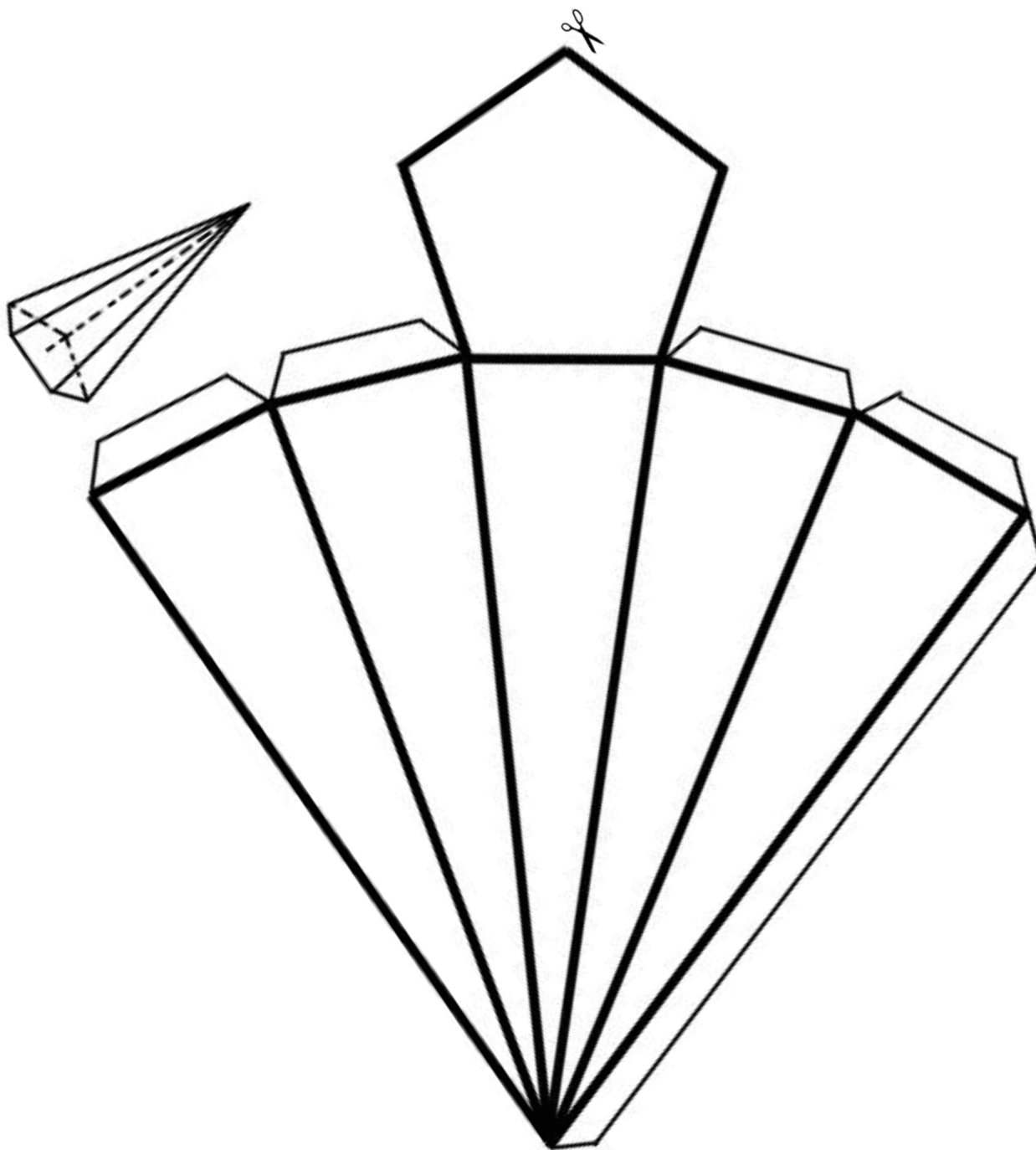
## TEMA 7

No.	A	B	C	D
1.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
4.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

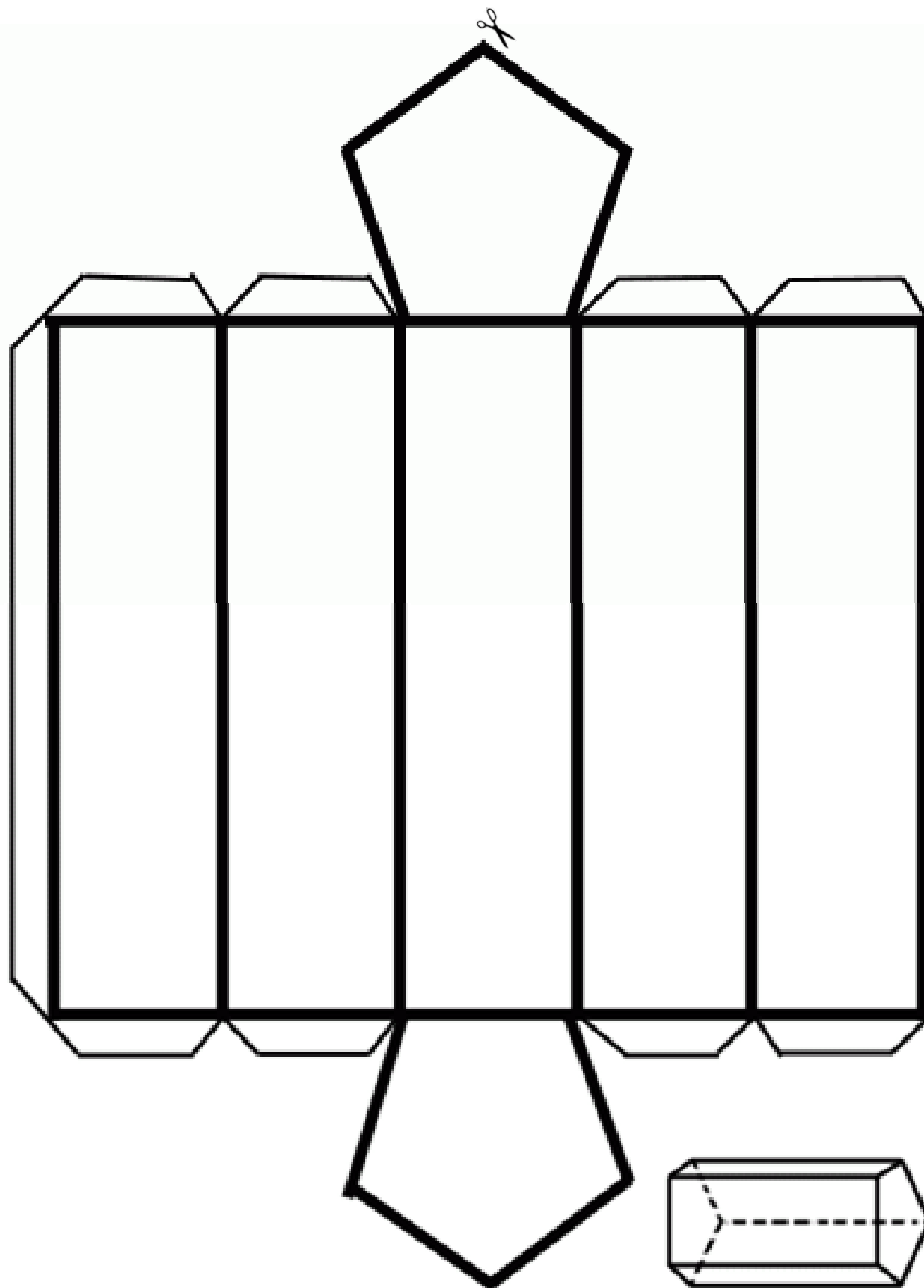
## TEMA 8

No.	A	B	C	D
1.	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>



**Anexo 1. Patrones para recortar y armar un prisma y una pirámide pentagonal**









Desarrollo de Habilidades  
**Comunicativas  
y Matemáticas**

**Secundaria**

**2do. Grado**